Categories for the Working Mathematician

圏論の基礎

S.マックレーン 著

三好博之／高木 理 訳

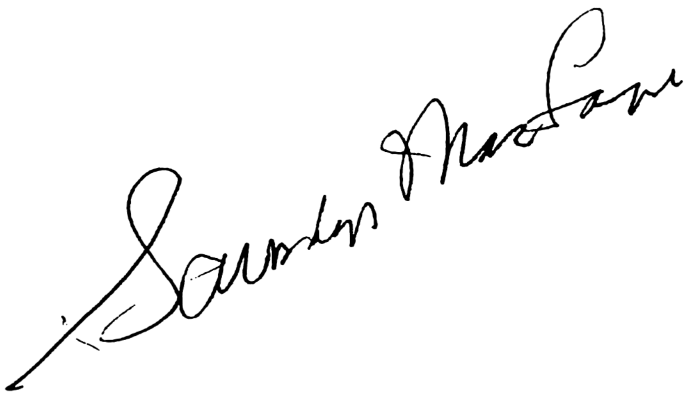
丸善出版

圏論の基礎

S.マックレーン 著
三好博之／高木 理 訳

丸善出版

Translation from the English language edition:
Categories for the Working Mathematician by Saunders Mac Lane



第二版への序

本書 “Categories Work” の第二版には，積極的な関心が寄せられているトピックについての二つの新しい章が加えられている．一つは対称モノイダル圏と組み紐付きモノイダル圏およびこれらのコヒーレンス定理についての章である．これらは内容自体も，また，量子場の理論における弦理論で用いられることから見ても興味深い題材である．二つ目の新しい章では 2-圏および最近注目を浴びている高次元圏について記述している．さらに圏に関する最近の進歩は他にも数多いので，その内いくらかでもカバーできるように参考文献を拡張した．

始めの十章には軽く改訂を施し多くの点が明確になった．その多くは George Janelidze からの有益な示唆によるものである．第 III 章には表現可能函手の余極限の記述を加え，第 IV 章には部分集合の特性関数と初等トポスの簡単な記述を含めた．

Dune Acres，1997 年 3 月 27 日　　　　ソーンダース・マックレーン

初版への序

圏論は急速に発展してきた．本書の目的は，いまや他の様々な数学的研究分野で働く数学者でも効果的に用いることのできるアイデアや手法を示すことである．これはいくつかのレベルで起こる．最初のレベルでは圏は便利な概念言語を提供する．これらは圏，函手，自然変換，反変性，および函手圏に基づく．これらの概念は第 I 章および第 II 章で適切な例と共に示される．次にくるのは函手の随伴対という基本的アイデアである．これは本質的に同値な多くの形式で現れる．たとえば普遍的構成，有向極限と逆極限，あるいは函手の対とそれに対応する射の集合の間の自然同型といった形式を取る．これらの形式はすべて第 III 章から第 V 章にかけてそれらの相互関係と共に調べられる．スローガンは「随伴函手は至るところに現れる」である．

別の見方では，圏論の基本概念はモノイドという概念である．これは結合法則を満たし恒等元を持つ二項の乗法演算を持つ集合である．圏自体もある種の一般化されたモノイドと見なすことができる．第 VI 章と第 VII 章ではこの概念とその一般化を探究する．モノイドと函手の随伴対との密接な関係は普遍代数というアイデアを照らし出し，代数の圏を特徴付ける Beck の定理において頂点に達する．他方で（テンソル積により与えられる）モノイド構造を持つ圏は特に，より便利な位相空間の圏の研究につながる．

圏は射からなるので，我々の主題は，要素なしで代わりに射を用いてやっていくにはどうすればよいかを学んでいくものとして記述することもできるだろう．この線に沿った考えは，最初から現れてはいるが，第 VIII 章で焦点が当てられる．そこではアーベル圏の初等的理論，およびいままでのように

図式を辿って要素を追跡することなしに図式の補題をすべて証明するための手段がカバーされる.

最後に，圏論の基本概念が終わりの二章にまとめられている．たとえば極限の，より差し迫って必要となる性質，特にフィルター極限の性質,「エンド」の計算，そしてカン拡張の概念，といったものである．カン拡張は随伴の基本的構成の，より深い形式である．圏論のすべての概念はカン拡張である，ということを見て本書は終わる（第 X 章第 7 節）.

私はこれらの章の題材について講義する多くの機会を得てきた．Chicago で，Boulder で American Mathematical Society の一連のコロキウム講義において，Edinburgh Mathematical Society の助力により St. Andrews で，Beno Eckmann と Forschungsinstitut für Mathematik の助力により Zürich で，A. Fröhlich と Kings and Queens Colleges の助力により London で，H. Seifert と Albrecht Dold の助力により Heidelberg で，B. Neumann，P. Neumann およびフルブライト助成の助力により Canberra で，Dan Christie と National Science Foundation の助力により Bowdoin で，Paul Mostert と Ford Foundation の助力により Tulane で，そして再び Chicago で Robert Maynard Hutchins と Marshall Harvey Stone の最終的な助力により行うことができた.

多くの同僚が私の研究を助けてくれた. M. André，J. Bénabou，E. Dubuc，F. W. Lawvere，そして F. E. J. Linton といった Chicago への絶え間ない訪問者からは多くのものを得た（これは Air Force Office of Scientific Reserach，Office of Naval Research，および National Science Foundation からの効果的なサポートにより可能となった）. Michael Barr，John Gray，Myles Tierney，そして Fritz Ulmer からはよい忠告を受け，Brian Abrahamson，Ronald Brown，W. H. Cockcroft，そして Paul Halmos からは賢明なアドバイスを受けた．Daniel Feigin と Geoffrey Phillips の二人はなんとかして私の講義のいくつかを使える形に書き留めてくれた．私の古い友人 A. H. Clifford と Tulane の他の人々は大きな手助けをしてくれた．John MacDonald と Ross Street はいくつかの章について核心に触れるアドバイスを与えてくれた．Spencer Dickson，S. A. Huq，そして Miguel La Plaza は他の題材を読んで批評を加えてくれた．Peter May の舌鋒鋭いアドバイスは強調や配列

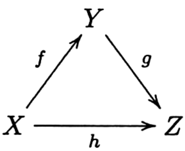
の仕方を生き生きと改良してくれた．Max Kelly の鷹の眼は最終稿にあった多くの甘い点を捕らえてくれた．Dorothy Mac Lane と Tere Shuman にはタイプをしてくれたことに，Dorothy Mac Lane には索引を作成してくれたことに，そして M. K. Kwong には注意深く原稿を読んでくれたことに感謝したい．しかし残っている間違い，そして強調や配列の仕方の選択は，私の責任である．

Dune Acres，1971 年 3 月 27 日　　　　ソーンダース・マックレーン

目 次

はじめに

圏論 (category theory) は，数学的体系の多くの性質が射 (arrow) からなる図式 (diagram) を用いて示すことによって統一し単純化できるという観察から始まる．各射 $f : X \to Y$ が関数を表すとしよう．つまり集合 X，集合 Y，および，各要素 $x \in X$ に要素 $fx \in Y$ を割り当てる規則 $x \mapsto fx$ を表す．可能な限り $f(x)$ ではなく fx と書き，不要な括弧は省略することにする．集合と関数からなる典型的な図式は次のようなものである．

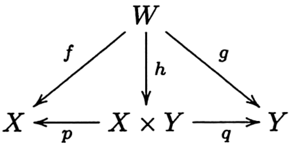


これは h が $h = g \circ f$ であるとき可換である．ここで $g \circ f$ は，$x \mapsto g(fx)$ で定義される通常の合成関数 $g \circ f : X \to Z$ である．同じ図式は他の数学的文脈にも適用される．すべての位相空間からなる「圏 (category)[1]」では，文字 X, Y, Z は位相空間を表し，f, g, h は連続関数を表す．また，すべての群からなる「圏」では，文字 X, Y, Z は群を表し，f, g, h は群の準同型を表す．

数学的構成の性質の多くは図式の普遍性 (universal property) によって表現できる．二つの集合のカルテシアン積 (cartesian product) $X \times Y$，つまり普通に要素 $x \in X$ と $y \in Y$ の順序対 $\langle x, y \rangle$ をすべて集めたものを考えよ

[1] ［訳注］category には哲学用語としての「範疇」という訳語とそこから転用された数学用語としての「圏」という訳語がある．ここは両方の意味を兼ねているが以後との整合性を考えてすべて圏と訳すことにする．第 I 章末尾の注釈も参照されたい．

う．その「軸」X および Y に沿った積の射影 $\langle x,y\rangle \mapsto x$, $\langle x,y\rangle \mapsto y$ が関数 $p: X\times Y \to X$, $q: X\times Y\to Y$ である．ある三番目の集合 W からの任意の関数 $h: W\to X\times Y$ は，その合成 $p\circ h$ および $q\circ h$ によって一意的に決まる．一方，W と二つの関数 f と g が下の図式のように与えられたとき，この図式を可換にする関数 h が存在する（前述により一意的である）．これは W の各要素 w について $hw = \langle fw, gw\rangle$ とすれば得られる．



こうして，X と Y が与えられたとき，他のどのような対 $\langle f,g\rangle$ も（ある h を経由して）対 $\langle p,q\rangle$ を通るように一意的に分解されるので，$\langle p,q\rangle$ は集合から X と Y への関数の対の中で「普遍的」なのである．この性質は，カルテシアン積 $X\times Y$ を（全単射を除いて[2]）一意的に記述している．同じ図式を位相空間の圏や群の圏で見ると，それは空間のカルテシアン積や群の直積を一意的に記述している．

随伴性 (adjointness) はこのような普遍性のもう一つの表現である．W から X へのすべての関数 $f: W\to X$ からなる集合を $\hom(W,X)$ と書き，U から X および V から Y への関数のすべての対 $\langle f: U\to X,\ g: V\to Y\rangle$ からなる集合を $\hom(\langle U,V\rangle, \langle X,Y\rangle)$ と書くことにすると，上の図式に示されている対応 $h\mapsto \langle ph, qh\rangle = \langle f,g\rangle$ は

$$\hom(W, X\times Y) \cong \hom(\langle W,W\rangle, \langle X,Y\rangle)$$

という全単射になる．この全単射は（後にもっと正確に述べるが），すべての集合 W とすべての集合の対 $\langle X,Y\rangle$ について「同じやり方」で定義されるという意味で「自然 (natural)」である（そして位相空間や群で翻訳したときにも同様に「自然」である）．この自然な全単射は，集合についての二つの構成を含む．一つは $W\mapsto \langle W,W\rangle$ であり，これは各集合をその対角対 (diagonal

---

2 ［訳注］圏論では「～を除いて一意的 (unique up to ～)」という言い回しをよく使う．これは「～で関係しているものを同一視すれば一意的」という意味である．

pair) $\Delta W = \langle W, W \rangle$ に対応させる．もう一つは $\langle X, Y \rangle \mapsto X \times Y$ であり，これは集合の各対をそのカルテシアン積に対応させる．上の全単射が与えられたとき，構成 $X \times Y$ は構成 Δ の**右随伴** (right adjoint) であり，Δ は積の左随伴 (left adjoint) であると言う．後にわかるように随伴は数学の至るところで起こっている．

構成「カルテシアン積」は一つの「函手 (functor)」であると言われるが，それは集合および集合間の関数の両方に適切に適用されるからである．二つの関数 $k : X \to X'$ と $\ell : Y \to Y'$ はカルテシアン積として次のような $k \times \ell$ を持つ．

$$k \times \ell : X \times Y \to X' \times Y', \quad \langle x, y \rangle \mapsto \langle kx, \ell y \rangle.$$

また一点集合 $1 = \{0\}$ は，$\lambda\langle 0, x \rangle = x$, $\varrho\langle x, 0 \rangle = x$ で与えられる全単射

$$1 \times X \xrightarrow{\lambda} X \xleftarrow{\varrho} X \times 1 \tag{1}$$

を考えれば，演算「カルテシアン積」の下で恒等元 (identity) として働くこともわかる．

モノイド (monoid)（恒等元を持つ半群）の概念は圏論において中心的な役割を果たす．モノイド M は，集合 M に二つの関数

$$\mu : M \times M \to M, \quad \eta : 1 \to M \tag{2}$$

が付随していて μ と η を使って書かれた次の二つの図式

$$\begin{array}{ccc} M \times M \times M & \xrightarrow{1\times\mu} & M \times M \\ \downarrow{\scriptstyle \mu\times 1} & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ M \times M & \xrightarrow{\mu} & M \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 1 \times M & \xrightarrow{\eta\times 1} & M \times M & \xleftarrow{1\times\eta} & M \times 1 \\ \downarrow{\scriptstyle \lambda} & & \downarrow{\scriptstyle \mu} & & \downarrow{\scriptstyle \varrho} \\ M & = & M & = & M \end{array} \tag{3}$$

を可換にするようなものとして記述することができる．ここで $1 \times \mu$ の 1 は恒等関数 $M \to M$ であり，$1 \times M$ の 1 は一点集合 $1 = \{0\}$ である．一方 λ と ϱ は上の (1) の全単射である．これらの図式が可換であるということは，次の合成が等しいということを意味する．

$$\mu \circ (1 \times \mu) = \mu \circ (\mu \times 1), \quad \mu \circ (\eta \times 1) = \lambda, \quad \mu \circ (1 \times \eta) = \varrho.$$

これらの図式は要素を使って書き直すことができる．関数 μ を（たとえば）

$x, y \in M$ について積 $\mu(x,y) = xy$ のように書き，一点集合 $1 = \{0\}$ 上の関数 η をその（唯一の）値である要素 $\eta(0) = u \in M$ で置き換えるのである．そうすると上の図式は次のようになる．

$$\begin{array}{ccc} \langle x,y,z\rangle & \longmapsto & \langle x,yz\rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ \langle xy,z\rangle & \longmapsto & (xy)z = x(yz) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \langle 0,x\rangle & \longmapsto & \langle u,x\rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & = & ux \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \langle x,u\rangle & \longleftarrow & \langle x,0\rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ xu & = & x \end{array}$$

これらはまさに，乗法が結合的 (associative) で左および右恒等元として要素 u を持つという見慣れたモノイドの公理そのものである．これは逆に言えば，代数的な恒等元をどうすれば可換図式で表せるかを示している．同じ過程は他の恒等元にも適用される．たとえば群は，モノイド M に関数 $\zeta : M \to M$（もちろん関数 $x \mapsto x^{-1}$ である）が付随していて次の図式を可換にするものである．

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{\delta} & M \times M & \xrightarrow{1\times\zeta} & M \times M \\ \downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ 1 & & \longrightarrow & & M \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} x & \longmapsto & \langle x,x\rangle & \longmapsto & \langle x,x^{-1}\rangle \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 0 & & \longmapsto & & u = xx^{-1} \end{array} \tag{4}$$

ここで $\delta : M \to M \times M$ は $x \in M$ について $x \mapsto \langle x,x\rangle$ となる対角関数 (diagonal function) であり，名前のない縦の射 $M \to 1 = \{0\}$ は M から一点集合への明らかな（そして一意的な）関数である．右側にはっきり示されているように，この図式はまさに ζ が各要素 $x \in M$ について x の右逆元である要素 x^{-1} を割り当てるということを述べている．

このような可換図式の中の射 μ, η, ζ による群のこの定義では，群の要素には陽に言及しない．そのため他の状況にも適用される．文字 M が（単なる集合でなく）位相空間を意味し，射が（単なる関数でなく）連続写像であるとき，条件 (3) と (4) は位相群を定義する —— なぜならば M は（その引数について同時に）連続な乗法の二項演算 μ を伴う位相空間であり，連続な右逆元を持ち，普通の群の公理をすべて満たすということを記述するからである．さらに，文字 M が（C^∞ 級の）可微分多様体を意味し，1 が一点多様体であって射 μ, ν, ζ が多様体の滑らかな写像であるとき，図式 (3) と (4) はリー群の定義になる．こうして群，位相群，リー群はすべて，集合，位相空

間，可微分多様体それぞれの圏における「図式的な」群として記述できる．

圏における群のこの定義は（(4) における逆元について）カルテシアン積による平方 $M \times M$ への対角写像 $\delta : M \to M \times M$ に依存していた．モノイドの定義はより一般的である．というのも $M \times M$ のカルテシアン積 $\times$ は，結合的であって同型 (1) で規定される意味で恒等元 1 を持てば，二つの対象上の他のどんな演算 $\Box$ で置き換えてもよいからである．このとき，C が圏であり，$\Box$ がこのような演算であり，1 はその単位元 (unit) であるとすると，体系 $(C, \Box, 1)$ におけるモノイドというものについて話すことができる．たとえば $(\mathbf{Ab}, \otimes, \mathbf{Z})$ におけるモノイド M を考えよう．ここで $\mathbf{Ab}$ はアーベル群の圏であり，$\times$ は普通のアーベル群のテンソル積で置き換えられ，1 は普通の整数の加法群 $\mathbf{Z}$ で置き換えられる．このとき (1) はよく知られた次の同型で置き換えられる．

$$\mathbf{Z} \otimes X \cong X \cong X \otimes \mathbf{Z}, \quad X \text{ はアーベル群}.$$

このとき $(\mathbf{Ab}, \otimes, \mathbf{Z})$ におけるモノイド M は単に環であると主張される．なぜなら与えられた準同型 $\mu : M \otimes M \to M$ は，$\otimes$ の定義により単に双線型 (bilinear) な[3]，すなわち右側および左側の加法について分配的な関数 $M \times M \to M$ だからであり，乗法と呼ばれる．一方アーベル群の準同型 $\eta : \mathbf{Z} \to M$ は M の一つの要素，つまり $\mathbf{Z}$ の生成元 1 の像 u を取り出すことにより完全に決定される．いまや可換図式 (3) は，アーベル群 M における乗法 μ が結合的で左および右恒等元として u を持つということを主張している —— 言い換えれば M は実際に（恒等元 = 単位元を持つ）環なのである．

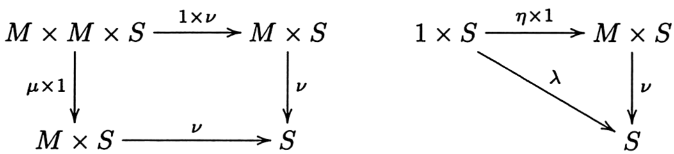
代数系の準同型は図式で書き表すこともできる．$\langle M, \mu, \eta \rangle$ と $\langle M', \mu', \eta' \rangle$ をそれぞれ上のように記述された二つのモノイドとすると，前者から後者への準同型は，以下の図式を可換にする関数 $f : M \to M'$ として定義される．

$$\begin{array}{ccccccc}
M & \quad & M \times M & \xrightarrow{\ \mu\ } & M & \quad & 1 \xrightarrow{\ \eta\ } M \\
\downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f \times f} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \Vert \qquad\quad \downarrow{\scriptstyle f} \\
M' & & M' \times M' & \xrightarrow{\ \mu'\ } & M' & & 1 \xrightarrow{\ \eta'\ } M'
\end{array} \tag{5}$$

3 ［訳注］双線型性の内，乗法に関する部分は乗法の定義の後に結合法則よりわかる．

要素で書くと，これは $f(xy) = (fx)(fy)$ であること，および単位元要素 u と u' について $fu = u'$ であることを主張している．こうして通常通りに準同型は合成と単位元を保存する単なる関数となる．M と M' が $(\mathbf{Ab}, \otimes, \mathbf{Z})$ におけるモノイド，すなわち環であるならば，ここで定義したような準同型 f は単に（単位元を保存する）環の準同型となる．

最後に，モノイド $\langle M, \mu, \eta\rangle$ の集合 S への**作用** (action) は，以下の二つの図式を可換にするような関数 $\nu : M \times S \to S$ として定義される．



$\nu(x, s) = x \cdot s$ と書いてモノイドの要素 x の要素 $s \in S$ への作用の結果を示すとき，これらの図式は単にすべての $x, y \in M$ とすべての $s \in S$ について

$$x \cdot (y \cdot s) = (xy) \cdot s\,, \quad u \cdot s = s$$

であるということを述べている．これらはモノイドの集合への作用に関する通常の条件である．集合に作用する群の場合は特に変換群 (group of transformations) としてよく知られている．集合の圏から位相空間の圏に移行すれば，位相モノイド (topological monoid) M の位相空間 S への通常の連続な作用を得る．$\langle M, \mu, \eta\rangle$ を $(\mathbf{Ab}, \otimes, \mathbf{Z})$ におけるモノイドとすれば，$\mathbf{Ab}$ の対象 S への M の作用は単に環 M 上の左加群 S となる．

第I章　圏，函手，自然変換

1　圏に関する公理

まず最初に集合論を何も使わずに公理によって直接圏を記述し，これを「メタ圏」と呼ぶ．実際には，さらに単純な概念である「(メタ) グラフ」から始める[1]．

メタグラフ (metagraph) は**対象** (object) a, b, c, ...，**射** (arrow) f, g, h, ...，そして以下の二つの演算からなる：

ドメイン (domain)，これは各射 f に対象 $a = \operatorname{dom} f$ を割り当てる．

コドメイン (codomain)，これは各射 f に対象 $b = \operatorname{cod} f$ を割り当てる．

f 上のこれらの演算は，f をそのドメイン（もしくは「ソース (source)」）から始まってそのコドメイン（もしくは「ターゲット (target)」）で終わる実際の矢印 (arrow) で表示することにより，最もうまく示される：

$$f : a \to b \quad もしくは \quad a \xrightarrow{f} b.$$

有限グラフは $\cdot \to \cdot \to \cdot$ や $\cdot \rightrightarrows \cdot$ のように容易に示すことができる．

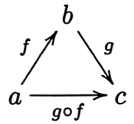
メタ圏 (metacategory) は，さらに次の二つの演算を持つメタグラフである：

恒等射 (identity)，これは各対象 a に射 $\mathrm{id}_a = 1_a : a \to a$ を割り当てる．

合成 (composition)，これは $\operatorname{dom} g = \operatorname{cod} f$ を満たす射の各対 $\langle g, f \rangle$ にこれらの**合成射** (composite) と呼ばれる射 $g \circ f : \operatorname{dom} f \to \operatorname{cod} g$ を割り当て

[1] ［訳注］メタ圏およびメタグラフという用語はあまり一般的ではない．通常は公理的に記述されるものも単に圏やグラフと呼ぶ．本章第 6 節も参照されたい．

る．この演算は次の図式で図示することができる．



ここでは含まれるすべてのドメインとコドメインを明示している．メタ圏におけるこれらの演算は次の二つの公理に従う：

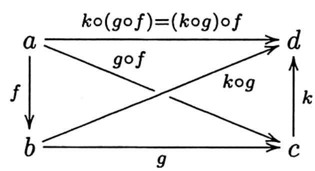
結合性 (associativity)．次のような対象と射

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{k} d$$

が与えられたとき，次の等式が常に成り立つ．

$$k \circ (g \circ f) = (k \circ g) \circ f\,. \tag{1}$$

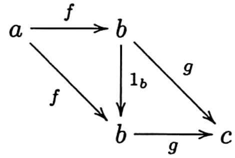
この公理は，意味があるときにはいつでも（すなわち (1) の両辺の合成が定義されるときにはいつでも）合成演算の結合律 (associative law) が成り立つことを主張している．この等式は以下の図式が可換であると述べることにより図で表現できる．



単位元律 (unit law)．すべての射 $f : a \to b$ と $g : b \to c$ について恒等射 1_b との合成は次を与える．

$$1_b \circ f = f \quad \text{かつ} \quad g \circ 1_b = g\,. \tag{2}$$

この公理は，意味があるときにはいつでも各対象 b の恒等射 1_b が合成演算の恒等元として働くことを主張している．等式 (2) は以下の図式が可換であると述べることにより図で表現できる．



我々はこのような（圏の対象でラベル付けされた）頂点 (vertex) と（同じ圏の射でラベル付けされた）辺 (edge) からなる図式を多用する．こういった図式が**可換** (commutative) であるとは，頂点 c と c' の各対について，向きの付いた辺からなる c から c' へ到達する任意の二つの経路がラベルの合成により c から c' への等しい射となることを言う．圏論的手法の有効性のかなりの部分は，各状況においてこういった図式が射の動作を生き生きと身近に表現するという事実にある．

b がメタ圏 C のどの対象であっても対応する恒等射 1_b は性質 (2) により一意的に決まる．この理由により，ときには恒等射 1_b を対象 b そのものと同一視して $b : b \to b$ と書くと便利である．すると都合よく $1_b = b = \mathrm{id}_b$ となる．

メタ圏はこれらすべての公理を満たすならばどのような翻訳でもよい．**集合のメタ圏** (metacategory of sets) はその一例である．これは対象をすべての集合とし，射をすべての関数とし，通常の恒等関数と通常の関数合成を用いる．ここで「関数」とは特定のドメインと特定のコドメインを持つ関数を意味する．したがって関数 $f : X \to Y$ は，ドメインである集合 X，コドメインである集合 Y，各要素 $x \in X$ に要素 $fx \in Y$ を割り当てる規則 $x \mapsto fx$（すなわち順序対 $\langle x, fx \rangle$ の適切な集合）からなる．これらの値は適宜 fx, f_x, $f(x)$ などと書かれる．たとえばどんな集合 S についても，すべての $s \in S$ に対し $s \mapsto s$ とする割り当ては**恒等関数** (identity function) $1_S : S \to S$ を記述するが，S が Y の部分集合であるときにはこの割り当て $s \mapsto s$ は**包含関数** (inclusion function) または**挿入関数** (insertion function) と呼ばれる関数 $S \to Y$ も記述する．これらの関数は $S = Y$ でない限りは異なっている．関数 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ が与えられたとき，**合成関数** $g \circ f : X \to Z$ はすべての $x \in X$ について $(g \circ f)x = g(fx)$ で定義される．$g \circ f$ は最初に f を適用し次に g を適用することを意味する —— 各関数 f をその引数の左に書くという慣習は守ることにする．しかしながら逆の習慣を用いる著者も多いことに注意されたい．

まとめると，すべての集合からなるメタ圏は，対象としてすべての集合を持ち，射としては通常の合成があるすべての関数を持つ．すべての群からなるメタ圏も同様に記述される．つまり対象はすべての群 G, H, K であり，射は集合 G から集合 H への関数 f で $f : G \to H$ が群の準同型となるものす

べてである．他にも多くのメタ圏がある．すべての位相空間と連続関数の射，すべてのコンパクトハウスドルフ空間と同じく連続関数の射，すべての環付き空間とそのモルフィズム[2]，などなど．どのメタ圏の射もしばしば**モルフィズム** (morphism) と呼ばれる．

メタ圏の対象はその恒等射と正確に対応するので，対象を全く抜きにして射のみを扱うことも技術的には可能である．**射のみのメタ圏** (arrows-only metacategory) C のデータは射，射の合成可能対と呼ばれる順序対 $\langle g, f\rangle$，および合成可能対 $\langle g, f\rangle$ にそれらの合成射と呼ばれる射 $g \circ f$ を割り当てる演算からなる.「$g \circ f$ が定義されている」とは「$\langle g, f\rangle$ が合成可能対である」ことを言う．

これらのデータから C の恒等射を，$f \circ u$ が定義されているときにはいつでも $f \circ u = f$ を満たし，かつ $u \circ g$ が定義されているときにはいつでも $u \circ g = g$ を満たすような射 u であると**定義する**．そのときデータは次の三つの公理を満たすことが要求される：

(i) 合成射 $(k \circ g) \circ f$ が定義されるときには合成射 $k \circ (g \circ f)$ が定義され，逆も言える．どちらかが定義されているときこれらの射は同一である（この**三つ組合成射** (triple composite) は kgf と書かれる）．

(ii) 三つ組合成射 kgf は，kg と gf の両方が定義されているときにはいつでも定義される．

(iii) C の各射 g について，$u' \circ g$ と $g \circ u$ が定義されているような C の恒等射 u と u' が存在する．

上で与えられた恒等射の明示的な定義から見ると，最後の公理は非常に強力である．定義から (iii) で u' と u が一意的であることが従い，各射 g にコドメイン u' とドメイン u が与えられる．これらの公理は先の公理と同値であ

[2] ［訳注］本書ではおおむね，準同型は代数系の等式を保存する写像，モルフィズムはより広く数学的構造の何らかの写像，射は最も一般的な圏論的概念，つまり抽象的な有向辺，として使われている．一般には morphism が準同型を意味することも射を意味することもある．また本書では，map は射もしくはモルフィズムと同義に用いられる場合と集合論的な写像を意味する場合があるので，基本的にはマップと訳し，写像であることが明らかな場合にのみ写像と訳すことにする．

る．もっと明示的に述べると，対象と射のメタ圏が与えられたとき，その射は与えられた合成により「射のみ」の公理を満足する．逆に射のみのメタ圏は，上のように定義される恒等射を対象と見なすとき，対象と射の公理を満足する（証明は演習問題とする）．

2 圏

圏とは（メタ圏と区別するときには）圏の公理の集合論への任意の翻訳を意味することになる．ここで詳細を述べよう．**有向グラフ** (directed graph)（「有向スキーム (directed scheme)」とも呼ばれる）は対象の集合 O，射の集合 A，二つの関数

$$A \underset{\mathrm{cod}}{\overset{\mathrm{dom}}{\rightrightarrows}} O \tag{1}$$

からなる．このグラフにおける射の合成可能対の集合は集合

$$A \times_O A = \{\langle g, f\rangle \mid g, f \in A \text{ かつ } \mathrm{dom}\, g = \mathrm{cod}\, f\}$$

であり「O 上の積」と呼ばれる．

圏とは，グラフに恒等射および合成と呼ばれる二つの関数

$$\begin{aligned} O &\xrightarrow{\mathrm{id}} A, & A \times_O A &\xrightarrow{\circ} A, \\ c &\longmapsto \mathrm{id}_c, & \langle g, f\rangle &\longmapsto g \circ f \end{aligned} \tag{2}$$

が加わり，すべての対象 $a \in O$ と射のすべての合成可能対 $\langle g, f\rangle \in A \times_O A$ について

$$\begin{gathered} \mathrm{dom}\,(\mathrm{id}\, a) = a = \mathrm{cod}\,(\mathrm{id}\, a)\,, \\ \mathrm{dom}\,(g \circ f) = \mathrm{dom}\,(f)\,, \quad \mathrm{cod}\,(g \circ f) = \mathrm{cod}\,(g) \end{gathered} \tag{3}$$

であり，第 1 節の公理 (1) および公理 (2) が成り立つものである．合成は gf とも書かれる．圏 C を扱うとき，普通は文字 A や O を使わずに

$$c \in C, \quad f \text{ in } C \tag{4}$$

と書いてそれぞれ「c は C の対象である」および「f は C の射である」ということを表す．また b から c への射の集合は

$$\hom(b,c) = \{f \mid f \text{ in } C,\ \operatorname{dom} f = b,\ \operatorname{cod} f = c\} \tag{5}$$

と書く．圏はこれら「hom 集合 (hom-set)」に作用する合成を用いて直接定義することもできる（以下の第 8 節）．しかし，我々は（やや特別な圏である）集合を強調するのではなく，公理，射，射の図式を強調するので，この習慣には従わない．後で見ることになるが，我々の圏の定義は結局，圏とは序章で述べた一般的な意味で積 $\times_O$ についてのモノイドであると言っていることになる．とりあえず例を考えてみよう．

0 は空圏（対象も射もない）である．

1 は一つの対象と一つの射（恒等射）からなる圏 ↻ である．

2 は二つの対象 a, b と恒等射の他にただ一つの射 $a \to b$ からなる圏 ↻→↻ である．

3 は三つの対象と恒等射の他に三角形  のように並ぶ射からなる圏である．

$\downarrow\downarrow$ は二つの対象 a, b と恒等射の他に二つの射 $a \rightrightarrows b$ からなる圏である．このような二つの射を**平行射** (parallel arrows) と呼ぶ．

上のいずれの場合でも，可能な合成の定義はただ一つしかない．

離散圏 (discrete category)．圏が**離散的** (discrete) であるとはすべての射が恒等射であることを言う．すべての集合 X はある離散圏の対象の集合であり（各対象 $x \in X$ について一つの恒等射 $x \to x$ を加えるだけでそのような圏が得られる），すべての離散圏は対象の集合からそうして決まってしまう．したがって離散圏とは集合である．

モノイド (monoid)．モノイドは対象が一つの圏である．よって各モノイドは，すべての射の集合，恒等射，射の合成の規則により決まる．どの二つの射も合成できるので，モノイドは結合的で恒等元（＝単位元）を持つ二項演算 $M \times M \to M$ を伴う集合 M として記述できる．よってモノイドは単位元を持つ半群そのものである．任意の圏 C と対象 $a \in C$ について，すべての射 $a \to a$ からなる集合 $\hom(a,a)$ はモノイドである．

群 (group)．群は対象が一つの圏で，すべての射が合成についての（両）逆元を持つものである．

行列 (matrice). 各可換環 K について，成分が K の要素であるすべての長方形 (rectangular) 行列の集合 $\mathbf{Matr}_K$ は圏である．対象はすべての正整数 $m, n, \ldots$ であり，各 $m \times n$ 行列 A は射 $A : n \to m$ と見なされ，合成は通常の行列の積である．

集合 (set). V が集合からなる任意の集合であるとき，$\mathbf{Ens}_V$ を，V のすべての集合 $X \in V$ を対象とし，すべての関数 $f : X \to Y$ を射とし，通常の関数合成を合成とする圏と見なす．$\mathbf{Ens}$ はこれらの圏の内の任意の一つを意味する．

前順序 (preorder). 前順序とは圏 P で，対象 p と p' が与えられたとき高々一つの射 $p \to p'$ が存在するものを意味する．任意の前順序 P において P の対象上の二項関係 $\leqq$ を，$p \leqq p'$ であるとは P において射 $p \to p'$ が存在することであると定義しよう．この二項関係は反射的（各 p について恒等射 $p \to p$ が存在するから）かつ推移的（射を合成できるから）である．ゆえに前順序は（対象の）集合で反射的かつ推移的な二項関係を伴うものである．逆に，このような関係を伴う任意の集合 P は，射 $p \to p'$ を $p \leqq p'$ となるような順序対 $\langle p, p' \rangle$ そのものとすれば，前順序を決定する．関係が推移的であるのでこれらの射を合成する一意的な方法が存在し，反射的であるので必要とされる恒等射が存在する．

前順序は**半順序** (partial order)（前順序に $p \leqq p'$ かつ $p' \leqq p$ ならば $p = p'$ という公理を加えたもの）と**線形順序** (linear order)（半順序で p と p' が与えられたときに $p \leqq p'$ か $p' \leqq p$ が成り立つもの）[3]を含む．

順序数 (ordinal number). 各順序数 n はそこまでのすべての順序数の線形順序集合 $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ と見なされる．特に 0 は空集合であり，最初の無限順序数は $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ である．各順序数 n は線形順序が付いており，ゆえに圏（前順序）である．たとえば上に挙げた圏 **1**, **2**, **3** は（線形に順序の付いた）順序数 1, 2, 3 に属する前順序である．もう一つの例は線形順序 ω である．これは圏としては，射

$$0 \to 1 \to 2 \to 3 \to \cdots ,$$

これらの合成射すべて，および各対象に対する恒等射からなる．

---

[3] ［訳注］**全順序** (total order) とも呼ばれる．

$\mathbf{\Delta}$ は，すべての有限順序数を対象とし，射 $f : m \to n$ をすべての順序保存関数（m で $i \leqq j$ ならば n で $f_i \leqq f_j$）とする圏である．この圏 $\mathbf{\Delta}$ は**単体圏** (simplicial category) と呼ばれることもあり中心的な役割を演ずる（第 VII 章）．

$\mathbf{Finord} = \mathbf{Set}_\omega$ は，すべての有限順序数 n を対象とし，射 $f : m \to n$ を m から n へのすべての関数とする圏である．各有限順序数 n についてちょうど一つの有限集合 n を使っているので，この圏は本質的にすべての有限集合からなる圏である[4]．

大きな圏 (large category)．すべての集合からなるメタ圏 —— これは集合ではない —— に加えて，実際の圏である **Set**，つまりすべての小さな (small) 集合からなる圏が欲しい．我々は十分に大きな集合 U である「ユニバース」が存在すると仮定し，そのとき集合 x がユニバースのメンバであるときに「小さい」と言い，**Set** をその対象の集合 U がすべての小さな集合の集合であり射が小さな集合から小さな集合へのすべての関数であるような圏とする[5]．これらの装置を使って（詳細は以下の第 7 節）他のよく知っている大きな圏を以下のように構築する：

Set：対象はすべての小さな集合，射はそれらの間の関数すべて．

$\mathbf{Set}_*$：基点付き集合[6]：対象は基点を一つ選んだ小さな集合，射は基点を保存する関数すべて．

Ens：（特に指定されていない）集合の集合 V のすべての要素とそれらの間のすべての関数からなる圏．

Cat：対象はすべての小さな圏[7]，射はすべての函手[8]．

Mon：対象はすべての小さなモノイド，射はすべてのモノイド準同型[9]．

Grp：対象はすべての小さな群，射はすべての群準同型．

Ab：対象はすべての小さな（加法的）アーベル群，射はその群準同型す

---

4 ［訳注］これらがこの対応により圏の意味で同値になるということ（第 4 節を参照）．ただし後者はここではまだ正確には定義できない．

5 ［訳注］実際には U がいくつかの集合の演算で閉じていることが必要になる（第 6 節を参照）．

6 ［訳注］基点付き集合については第 8 節を参照．

7 ［訳注］対象の集合と射の集合が共に小さな集合である圏．モノイドや群の場合も同様．

8 ［訳注］函手については第 3 節を参照．

9 ［訳注］モノイド準同型はモノイドを圏と見たときの函手である．群準同型も同様．

べて.

Rng：対象はすべての小さな環，射はそれらの間のすべての（単位元を保存する）環準同型.

CRng：対象はすべての小さな可換環，射はその環準同型すべて.

R-**Mod**：対象は環 R 上のすべての小さな左加群，射はその線型写像すべて.

Mod-R：対象は環 R 上のすべての小さな右加群，射はその線型写像すべて.

K-**Mod**：対象は可換環 K 上のすべての小さな加群，射はその線型写像すべて.

Top：対象は小さな位相空間，射は連続写像すべて.

Toph：対象は小さな位相空間，射は連続写像のホモトピー類すべて.

$\mathbf{Top}_*$：対象は基点を一つ選んだ小さな位相空間，射は基点を保存する連続写像すべて.

（これらのような）特定の圏はいつも太字体で表すことにしよう．圏を表すのに語頭を大文字にした筆記体を用いる著者も多い.

3 函手

函手 (functor) とは圏のモルフィズムである．詳しく言えば，圏 C と B について，ドメインが C でありコドメインが B である函手 $T : C \to B$ は，二つの適切に関連付けられた関数，すなわち C の各対象 c に B の対象 Tc を割り当てる**対象関数** (object function) T と，

$$T(1_c) = 1_{Tc}, \quad T(g \circ f) = Tg \circ Tf \tag{1}$$

となるように C の各射 $f : c \to c'$ に B の射 $Tf : Tc \to Tc'$ を割り当てる**射関数** (arrow function)（同じく T と書く）からなる．ただし後者の条件は合成 $g \circ f$ が C で定義されているときに成り立つものとする．函手は圏と同様に「射のみ」の流儀で記述することができる．すると函手は C の射 f から B の射 Tf への関数 T で，C の各恒等射を B の恒等射に移し，C の各合成可能対 $\langle g, f\rangle$ を B の合成可能対 $\langle Tg, Tf\rangle$ に移し，$Tg \circ Tf = T(g \circ f)$ を満たすものとなる.

単純な例は冪集合函手 $\mathcal{P} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ である．その対象関数は各集合 X

に，X のすべての部分集合 $S \subset X$ からなる通常の冪集合 $\mathcal{P}X$ を割り当てる．射関数は各 $f : X \to Y$ に，各 $S \subset X$ をその像 $fS \subset Y$ に写す写像 $\mathcal{P}f : \mathcal{P}X \to \mathcal{P}Y$ を割り当てる．$\mathcal{P}(1_X) = 1_{\mathcal{P}X}$ および $\mathcal{P}(g \circ f) = \mathcal{P}g \circ \mathcal{P}f$ なので，これは明らかに函手 $\mathcal{P} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ を定義している．

函手は代数的位相幾何学で初めて陽に認識された．そこでは幾何学的性質を代数的不変量を用いて記述するときにそれらが自然に現れる．たとえば，与えられた次元 n（n はある自然数）における特異ホモロジーは，各位相空間 X に X の n 次ホモロジー群と呼ばれるアーベル群 $H_n(X)$ を割り当て，空間の各連続写像 $f : X \to Y$ に対応する群の準同型 $H_n(f) : H_n(X) \to H_n(Y)$ を割り当てる．これは H_n が函手 $\mathbf{Top} \to \mathbf{Ab}$ となるような仕方になっている．たとえば，もし $X = Y = S^1$ が円ならば $H_1(S^1) = \mathbf{Z}$ であり，群準同型 $H_1(f) : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ はある整数 d（1 の像）によって決定される．この整数は連続写像 $f : S^1 \to S^1$ の通常の「次数」である．この場合もそうだが一般に，ホモトピックな写像 $f, g : X \to Y$ は同じ準同型 $H_n(f) : H_n(X) \to H_n(Y)$ を生み出すので，H_n は実際にはホモトピーの圏の上に定義される函手 $\mathbf{Toph} \to \mathbf{Grp}$ と見なすことができる．ホモロジーについてのアイレンバーグ–スティーンロッド公理系 (Eilenberg-Steenrod axioms) は，各自然数 n について H_n が $\mathbf{Toph}$ 上の函手であるという公理から始まり，続いてこれらの函手についてある性質を付加する．より最近になって発展した驚くべきホモロジーとコホモロジーの理論も $\mathbf{Toph}$ 上の函手になっている．空間 X のホモトピー群 $\pi_n(X)$ も函手と見なすことができる．これらは X における基点の選択に依存するので函手 $\mathbf{Top}_* \to \mathbf{Grp}$ になっている．位相幾何学での函手の利用における指導的なアイデアは，H_n や π_n が位相空間だけでなくそれらの間のすべての連続写像についても代数的描像やイメージを与えるというものである．

函手は代数でも自然に現れる．任意の可換環 K について，K の要素を成分とする非特異なすべての $n \times n$ 行列からなる集合は通常の線型群 $\mathrm{GL}_n(K)$ である．さらに環の準同型 $f : K \to K'$ は明らかなやり方で群の準同型 $\mathrm{GL}_n f : \mathrm{GL}_n(K) \to \mathrm{GL}_n(K')$ を生み出す．これらのデータは，各自然数 n について函手 $\mathrm{GL}_n : \mathbf{CRng} \to \mathbf{Grp}$ を定義する．任意の群 G について，**交換子** (commutator) $xyx^{-1}y^{-1}$ $(x, y \in G)$ のすべての積からなる集合は，交換子群と呼ばれる G の正規部分群 $[G, G]$ である．群の準同型 $G \to H$ はどれも交

換子を交換子に写すので，割り当て $G \mapsto [G,G]$ は明らかな函手 $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp}$ を定義し，$G \mapsto G/[G,G]$ は因子-交換子函手 (factor-commutator functor) という函手 $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$ を定義する．しかしながら，G の中心 (center) $Z(G)$ (すべての x について $ax = xa$ であるようなすべての $a \in G$) は $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp}$ を自然には定義しない．なぜなら準同型 $G \to H$ は G の中心の要素を H の中心に入っていない要素に写すかもしれないからである．

代数的対象の構造のいくらか，もしくはすべてを単に「忘れる」函手はよく**忘却** (forgetful) 函手（もしくは**基底** (underlying) 函手）と呼ばれる．たとえば，忘却函手 $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ は各群 G に（積を，したがって群の構造を「忘れて」）その要素からなる集合 UG を割り当て，群の各モルフィズム $f : G \to G'$ に同じ関数 f を単なる集合間の関数と見なして割り当てる．忘却函手 $U : \mathbf{Rng} \to \mathbf{Ab}$ は各環 R に R の加法的アーベル群を割り当て，環の各モルフィズム $f : R \to R'$ に同じ関数を単に加法のモルフィズムと見なして割り当てる．

函手は合成することができる．明示的には，圏 A, B, C の間の函手

$$C \xrightarrow{T} B \xrightarrow{S} A$$

が与えられたとき，C の対象 c と射 f についての合成関数

$$c \mapsto S(Tc), \qquad f \mapsto S(Tf)$$

は，S と T の（その順序での）**合成** (composite) と呼ばれる函手 $S \circ T : C \to A$ を定義する．この合成は結合的である．各圏 B について恒等函手 $I_B : B \to B$ が存在し，この合成について単位元として作用する．したがって，すべての圏からなるメタ圏を考えることができる．その対象はすべての圏であり，その射はすべての函手であり，上記の合成を持つ．同様に，すべての小さな圏からなる圏 $\mathbf{Cat}$ を作ることができる —— しかしすべての圏の圏は作ることができない．

圏の**同型** (isomorphism) $T : C \to B$ とは，C から B への函手 T で対象と射の両方について全単射になっているものである．別の同値な定義では，函手 $T : C \to B$ が同型であるとは，函手 $S : B \to C$ が存在して合成 $S \circ T$ と $T \circ S$ の両方が恒等函手となることを言う．このとき S は**両側逆函手** (two-sided

inverse) $S = T^{-1}$ となる．

同型よりはるかに弱いいくつかの性質も有用となる．

C の対象からなるすべての対 c, c' と，B のすべての射 $g : Tc \to Tc'$ について，C の射 $f : c \to c'$ が存在して $g = Tf$ となるとき，函手 $T : C \to B$ は**充満** (full) であると言う．明らかに二つの充満函手の合成は充満函手である．

C の対象からなるすべての対 c, c' と，C の平行する射からなるすべての対 $f_1, f_2 : c \to c'$ について，等式 $Tf_1 = Tf_2 : Tc \to Tc'$ から $f_1 = f_2$ が従うとき，函手 $T : C \to B$ は**忠実** (faithful)（または埋め込み）であると言う．同じように忠実函手の合成は忠実である．たとえば，忘却函手 **Grp** → **Set** は忠実であるが充満ではなく，また対象について全単射でない．

これらの二つの性質は hom 集合（第 2 節の (5) を見られたい）によって目に見えるようにすることができる．与えられた対象の対 $c, c' \in C$ について，射関数 $T : C \to B$ は各 $f : c \to c'$ に射 $Tf : Tc \to Tc'$ を割り当てるので，関数

$$T_{c,c'} : \hom(c, c') \to \hom(Tc, Tc'), \quad f \mapsto Tf$$

を定義する．このとき T は，すべてのこのような関数が全射であるとき充満であり，すべてのこのような関数が単射であるとき忠実である．充満かつ忠実な（すなわち「充満忠実 (fully faithful) な」）函手について，すべてのこのような関数は全単射であるが，このことは函手そのものが圏の同型であるということを意味しない．なぜなら T の像に入っていない B の対象があるかもしれないからである．

圏 C の**部分圏** (subcategory) S とは，C のいくつかの対象といくつかの射の集まりで，各射 f について対象 dom f と cod f の両方を含み，各対象 s について恒等射 1_s を含み，合成可能な射の各対 $s \to s' \to s''$ についてその合成を含むものである．これらの条件は対象と射のこれらの集まりそのものが圏 S を構成することを保証する．さらに，S の各対象と各射を（C の中の）それら自身に写す入射（包含）写像 $S \to C$ は函手であり，**包含函手** (inclusion functor) と言う．包含函手は自動的に忠実になる．包含函手 $S \to C$ が充満であるとき，S は C の**充満部分圏** (full subcategory) であると言う．したがって，C が与えられているとき，充満部分圏はその対象の集合だけ与えれば決

定される．なぜなら，これらの任意の二対象 s, s' 間の射は C におけるすべてのモルフィズム $s \to s'$ であるからである．たとえばすべての有限集合からなる圏 $\mathbf{Set}_f$ は圏 $\mathbf{Set}$ の充満部分圏である．

演習問題

1. 整域から商体を構成すること，およびリー群からリー代数を構成することは，それぞれ函手と見なせることを示せ．
2. 函手 $\mathbf{1} \to C$, $\mathbf{2} \to C$, $\mathbf{3} \to C$ はそれぞれ C の対象，射，射の合成可能対に対応することを示せ．
3. 以下の特別なタイプの圏で「函手」を解釈せよ．(a) 二つの前順序の間の函手は単調な（すなわち $p \leqq p'$ から $Tp \leqq Tp'$ が従う）関数 T である．(b) 二つの群（対象が一つの圏）の間の函手は群のモルフィズムである．(c) G が群ならば，函手 $G \to \mathbf{Set}$ は G の置換表現であり，函手 $G \to \mathbf{Matr}_K$ は G の行列表現である．
4. 各群 G をその中心に写す函手 $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$ は存在しないことを示せ（対称群で $S_2 \to S_3 \to S_2$ を考えよ）．
5. 対象関数がすべての群 G について恒等関数，すなわち $T(G) = G$ である二つの異なる函手 $T : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp}$ を見つけよ．

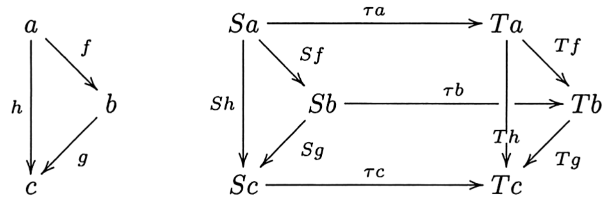
4 自然変換

二つの函手 $S, T : C \to B$ が与えられたとき，**自然変換** (natural transformation) $\tau : S \dot{\to} T$ は，C の各対象 c に B の射 $\tau_c = \tau c : Sc \to Tc$ を割り当てる関数で，C のすべての射 $f : c \to c'$ について図式

$$\begin{array}{ccc} c & \quad & Sc \xrightarrow{\ \tau c\ } Tc \\ \downarrow f & & Sf \downarrow \qquad\quad \downarrow Tf \\ c' & & Sc' \xrightarrow[\ \tau c'\ ]{} Tc' \end{array} \tag{1}$$

が可換になるようなものである．これが成り立つとき，$\tau_c : Sc \to Tc$ は c において**自然** (natural) であるとも言う．函手 S を C（のすべての対象と射）の B での描像を与えるものと見なすと，自然変換 τ は描像 S を描像 T に写す

（もしくは翻訳する）射の集合で上のようなすべての矩形（と平行四辺形！）が可換になるものである．



$\tau a, \tau b, \tau c, \ldots$ は自然変換 τ のコンポーネント (component) と呼ばれる．

自然変換はしばしば**函手のモルフィズム**と呼ばれる．すべてのコンポーネント τc が B で可逆[10]である自然変換 τ は**自然同値** (natural equivalence)，もしくはよりよい命名である**自然同型** (natural isomorphism) と呼ばれる．記号では $\tau : S \cong T$ と書く．この場合，B における逆射 $(\tau c)^{-1}$ は自然変換 $\tau^{-1} : T \dot{\to} S$ のコンポーネントである．

行列式は自然変換である．陽に示すために，$\det_K M$ を可換環 K の元を成分に持つ $n \times n$ 行列 M の行列式とし，K^* は K の単数 (unit)（可逆元）のなす群を表すとしよう．$\det_K M$ が単数であるとき M は正則 (non-singular) であり，$\det_K$ は群のモルフィズム $\mathrm{GL}_n K \to K^*$（**Grp** の射）である．行列式はすべての環 K について同じ式で定義されるので，可換環の各モルフィズム $f : K \to K'$ は可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n K & \xrightarrow{\det_K} & K^* \\ {\scriptstyle \mathrm{GL}_n f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ \mathrm{GL}_n K' & \xrightarrow{\det_{K'}} & K'^* \end{array} \tag{2}$$

を引き起こす．これは $\mathbf{CRng} \to \mathbf{Grp}$ である二つの函手の間の変換 $\det : \mathrm{GL}_n \to (\ )^*$ が自然であることを述べている．

各群 G に対する因子-交換子群への射影 $p_G : G \to G/[G, G]$ は **Grp** 上の恒等函手から因子-交換子函手 $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp}$ への変換 p を定義する．さらに p は自然である．なぜなら各群準同型 $f : G \to H$ は以下の図式が可

10 ［訳注］可逆な射および逆射については本章第 5 節を参照．

換になるような明らかな準同型 f' を定義するからである．

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{p_G} & G/[G,G] \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ H & \xrightarrow{p_H} & H/[H,H] \end{array} \tag{3}$$

二重指標群 (double character group) はすべてのアーベル群 G からなる圏 **Ab** における示唆的な例を生み出す．$D(G)$ を G の指標群 (character group) とすると，$DG = \hom(G, \mathbf{R}/\mathbf{Z})$ はすべての準同型 $t : G \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ からなる集合であり，よく知られている群構造を持つ．ここで $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ は 1 を法とする実数の加法群である．**Ab** の各射 $f : G' \to G$ は，各 t について $(Df)t = tf : G' \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ とし合成可能な射について $D(g \circ f) = Df \circ Dg$ とすることにより **Ab** の射 $Df : DG \to DG'$ (逆方向!) を決定する．この反転のために D は函手にならない (これは **Ab** から **Ab** への「反変 (contravariant)」函手である．第 II 章第 2 節を見られたい)．しかしながら，2 回繰り返して求められた指標群 $G \mapsto D(DG)$ と恒等写像 $I(G) = G$ は，両方とも函手 $\mathbf{Ab} \to \mathbf{Ab}$ となる．各群 G について準同型

$$\tau_G : G \to D(DG)$$

が存在するが，これは各 $g \in G$ に対して，任意の指標 $t \in DG$ について $t \mapsto tg$ とすることにより与えられる関数 $\tau_G g : DG \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ を割り当てるというよく知られた方法で得られる．したがって $(\tau_G g)t = tg$ となる．τ が自然変換 $\tau : I \dot{\to} DD$ であることは直ちに検証される．この言明は，τ の定義が基底や生成元その他の人為的な選択によらないという初等的な所見の正確な表現に過ぎない．G が有限の場合，τ_G は同型になる．したがって，すべての函手を有限アーベル群の圏 $\mathbf{Ab}_f$ に制限すると τ は自然同型になる．

一方で，各有限アーベル群 G について，G からその指標群への同型 $\sigma_G : G \cong DG$ が存在する．しかし，この同型は巡回群の直積としての G の表現に依存しており，それゆえ自然ではない．より明示的に述べると，すべての有限アーベル群を対象に持ち，そのような群の間のすべての同型 f を射に持つ圏 $\mathbf{Ab}_{f,i}$ 上の反変函手 $D' : \mathbf{Ab}_{f,i} \to \mathbf{Ab}_{f,i}$ を，$D'G = DG$ かつ $D'f = Df^{-1}$ とすることにより，D から作ることができる．このとき $\sigma_G : G \to D'G$ は

函手 $\mathbf{Ab}_{f,i} \to \mathbf{Ab}_{f,i}$ どうしのマップ $\sigma : I \to D'$ となるが，我々の定義の意味では自然ではない．

これと平行している例は有限次元ベクトル空間からその二重双対ベクトル空間へのよく知られた自然同型である．

自然性 (naturality) の別の例は（あるユニバース U における）すべての有限順序数 n からなる圏 **Finord** とすべての有限集合からなる圏 $\mathbf{Set}_f$ を比較するときに現れる．すべての順序数 $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ は有限集合であるから，包含 S は函手 $S : \mathbf{Finord} \to \mathbf{Set}_f$ になる．他方，各有限集合 X は X の要素の数である順序数 $n = \#X$ を決定する．つまり，各 X について全単射 $\theta_X : X \to \#X$ を選ぶことができる．そして，有限集合の間の任意の関数 $f : X \to Y$ については，対応する順序数の間の関数 $\#f : \#X \to \#Y$ を $\#f = \theta_Y f \theta_X^{-1}$ により定義することができる．これは図式

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\theta_X} & \#X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \#f} \\ Y & \xrightarrow{\theta_Y} & \#Y \end{array}$$

が可換になることを保証し，$\#$ を函手 $\# : \mathbf{Set}_f \to \mathbf{Finord}$ にする．もし X がそれ自身順序数であれば θ_X は恒等関数としてよい．これは函手の合成 $\# \circ S$ が **Finord** の恒等函手 I' であることを保証する．他方，函手の合成 $S \circ \#$ は恒等函手 $I : \mathbf{Set}_f \to \mathbf{Set}_f$ ではない．なぜならそれは有限集合 X を特別な有限集合 —— X と同じ個数の要素を持つ順序数 n —— に写すからである．しかしながら上の正方形の図式はまさに $\theta : I \xrightarrow{\cdot} S \circ \#$ が自然同型であることを示している．合わせると $I \cong S \circ \#$ と $I' = \# \circ S$ を得る．

より一般的には，圏 C と D の間の**同値** (equivalence) が，函手の対 $S : C \to D$ と $T : D \to C$ で自然同型 $I_C \cong T \circ S$, $I_D \cong S \circ T$ を伴うものとして定義される．（第 IV 章第 4 節で説明される）この概念によって,「そっくり」だが「大きさ」が非常に異なる圏を比較することができるようになることをこの例は示している．

自然性の例は他にもたくさん用いるつもりである．アイレンバーグとマックレーンが最初に気付いたように,「圏」は「函手」を定義可能にするために

定義され,「函手」は「自然変換」を定義可能にするために定義されてきたのである.

演習問題

1. S をある決まった集合とし，X^S を $h : S \to X$ であるすべての関数の集合とする．$X \mapsto X^S$ がある函手 $\mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ の対象関数であること，および，$e(h,s) = h(s)$ すなわち $s \in S$ における関数 h の値によって定義される評価 (evaluation) $e_X : X^S \times S \stackrel{\cdot}{\to} X$ が自然変換であることを示せ.
2. H がある決まった群であるとき，$G \mapsto H \times G$ は函手 $H \times - : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp}$ を定義すること，および，群の各モルフィズム $f : H \to K$ は自然変換 $H \times - \stackrel{\cdot}{\to} K \times -$ を定義することを示せ.
3. B と C が群であり（それぞれ対象が一つの圏と見なす）$S, T : B \to C$ が函手（群の準同型）であるとき，自然変換 $S \stackrel{\cdot}{\to} T$ が存在するのは，S と T が共役 (conjugate) である，すなわち，ある要素 $h \in C$ が存在してすべての $g \in B$ について $Tg = h(Sg)h^{-1}$ となるときであり，かつそのときに限ることを示せ.
4. C が圏であり P が前順序である函手 $S, T : C \to P$ について自然変換 $S \stackrel{\cdot}{\to} T$ が存在する（このとき一意的である）のは，すべての対象 $c \in C$ について $Sc \leqq Tc$ となるときであり，かつそのときに限ることを示せ.
5. すべての自然変換 $\tau : S \stackrel{\cdot}{\to} T$ は，各合成可能対 $\langle g, f \rangle$ について $Tg \circ \tau f = \tau(gf) = \tau g \circ Sf$ となるように C の各射 $f : c \to c'$ を B の射 $\tau f : Sc \to Tc'$ に写す関数（同じく τ と呼ぶ）を定義することを示せ．逆に，すべてのこのような関数 τ が，ある一意的な自然変換から $\tau_c = \tau(1_c)$ により得られることを示せ.（これは自然変換の「射のみ」による記述を与える.）
6. F を体とする．F 上のすべての有限次元ベクトル空間の圏（すべての線型変換を射とする）は第 2 節で述べた圏 $\mathbf{Matr}_F$ と同値であることを示せ.

5　モニック射，エピ射，ゼロ射

圏論的取り扱いにおいては，通常は要素（集合や群の要素）を用いて定式化される多くの性質が射を用いて定式化される．たとえば，集合 X がちょうど一つの要素を持つと言う代わりに，他の任意の集合 Y についてちょうど一つの関数 $Y \to X$ が存在すると言うことができる．ここではこういった「要素なしで済ませる」手法の例をさらにいくつか定式化する.

射 $e:a\to b$ が C で**可逆** (invertible) であるとは，C の射 $e':b\to a$ が存在して $e'e=1_a$ かつ $ee'=1_b$ を満たすことである．このような e' が存在するとき，それは一意的であり，$e'=e^{-1}$ と書く[11]．合成 e_1e_2 が定義されていて e_1 と e_2 の両方が可逆であるとき，ありふれた証明により $(e_1e_2)^{-1}=e_2^{-1}e_1^{-1}$ となる．二つの対象 a と b が圏 C で**同型** (isomorphic) であるとは，可逆な射（**同型射** (isomorphism)）$e:a\to b$ が存在することであり，$a\cong b$ と書く．対象の同型という関係は明らかに反射的，対称的，推移的である．

射 $m:a\to b$ が C で**モニック** (monic) であるとは，任意の二つの平行な射 $f_1,f_2:d\to a$ について等式 $m\circ f_1=m\circ f_2$ から $f_1=f_2$ が従うことである．言い換えれば，m がモニックであるとは，左側ならいつでも簡約 (cancel) できる（**左簡約可能** (left cancellable) である）ということである．**Set** や **Grp** ではモニックな射はちょうど普通の意味での単射 (injection, monomorphism)，すなわち中への一対一関数になっている．

射 $h:a\to b$ が**エピ** (epi) であるとは，任意の二つの射 $g_1,g_2:b\to c$ について等式 $g_1\circ h=g_2\circ h$ から $g_1=g_2$ が従うことである．言い換えれば，h がエピであるとは**右簡約可能** (right cancellable) であるということである．**Set** ではエピな射はちょうど普通の意味での全射 (surjection, epimorphism)，すなわち上への関数になっている．

射 $h:a\to b$ について**右逆射** (right inverse) とは射 $r:b\to a$ で $hr=1_b$ を満たすものである．右逆射（普通は一意的でない）は h の**断面** (section) とも呼ばれる．h が右逆射を持つならばそれは明らかにエピである．**Set** ではその逆も成り立つが **Grp** では成り立たない．同様に，h の**左逆射** (left inverse) は h の**レトラクション** (retraction) と呼ばれ，左逆射を持つ射は必ずモニックである．もし $gh=1_a$ ならば，g は**分裂** (split) エピ射であり，h は**分裂モニック**射であり，合成 $f=hg$ が定義されて冪等射になる．一般に射 $f:b\to b$ が**冪等** (idempotent) であるとは $f^2=f$ を満たすことである．冪等射が**分裂**しているとは $f=hg$ かつ $gh=1$ となるような射 g と h が存在することである．

対象 t が C で**終** (terminal) 対象であるとは，C の各対象 a についてちょ

11　［訳注］これを e の C における**逆射** (inverse) と呼ぶ．

うど一つの射 $a \to t$ が存在することである．t が終対象のとき $t \to t$ である唯一の射が恒等射であり，C の二つの終対象は C で同型である．対象 s が C で**始** (initial) 対象であるとは，C の各対象 a についてちょうど一つの射 $s \to a$ が存在することである．たとえば圏 **Set** では空集合が始対象であり，任意の一点集合が終対象である．**Grp** では一要素の群が始対象かつ終対象である．

C における**ヌル対象** (null object) z とは，始対象かつ終対象であるものである．C がヌル対象を持つとき，その対象は同型を除いて一意的であり，一方で C の任意の二つの対象 a と b について一意的な射 $a \to z \to b$（z を経由した合成射）が存在し，これを a から b への**ゼロ射** (zero arrow) と呼ぶ．ゼロ射との任意の合成射はそれ自身ゼロ射である．たとえば圏 **Ab** と R-**Mod** はヌル対象（すなわち 0！）を持ち，**Set**$_*$ も同様である（すなわち一点集合）．

亜群 (groupoid) とはすべての射が可逆な圏である．典型的な亜群は位相空間 X の**基本亜群** (fundamental groupoid) $\pi(X)$ である．$\pi(X)$ の対象は X の点 x であり，$\pi(X)$ の射 $x \to x'$ は x から x' への経路 f のホモトピー類 (homotopy class) である．（このような経路 f は連続関数 $I \to X$ で I が閉区間 $I = [0,1]$ かつ $f(0) = x$, $f(1) = x'$ を満たすものであり，一方で同じ端点 x, x' を持つ二つの経路 f, g がホモトピック (homotopic) であるとは連続関数 $F : I \times I \to X$ で I の任意の s と t について $F(t,0) = f(t)$, $F(t,1) = g(t)$ と $F(0,s) = x$, $F(1,s) = x'$ を満たすことである[12]．）経路 $g : x' \to x''$ と $f : x \to x'$ の**合成** (composite) は「f の後に g が続く」経路 h であり

$$
\begin{aligned}
h(x) &= f(2t), && 0 \leqq t \leqq 1/2, \\
&= g(2t-1), && 1/2 \leqq t \leqq 1
\end{aligned}
\tag{1}
$$

によって明示的に与えられる．合成はホモトピー類にも適用され，$\pi(X)$ は圏に，そして亜群になる（任意の経路の逆は同じ経路を逆向きに辿ったものである）．

亜群 G の各射は可逆であるので，G の各対象 x は，すべての $g : x \to x$ からなる群 $\hom_G(x,x)$ を定める．射 $f : x \to x'$ が存在するとき，群 $\hom_G(x,x)$

12 ［訳注］つまりホモトピー類とは，同じ端点を持つ経路のホモトピックという関係による同値類である．ホモトピック関係は同値関係でなければならないがこれは容易に示せる．

と $\hom_G(x', x')$ は $g \mapsto fgf^{-1}$（すなわち共役写像）により同型である．亜群が**連結** (connected) であるとは，その対象の任意の二つを結ぶ射が存在することである．連結な亜群は同型を除いてある群（群 $\hom_G(x, x)$ の一つ）とある集合（すべての対象の集合）により定まるということは容易に示せる．このようにして，経路により連結な[13]空間 X の基本亜群 $\pi(X)$ は，空間の点の集合と群 $\hom_{\pi(X)}(x, x)$ —— X の**基本群** (fundamental group) —— により定まる．

演習問題

1. エピかつモニックだが可逆でない射を持つ圏を見つけよ（たとえばある位相空間の稠密な部分集合）．
2. モニック射の合成がモニックであること，およびエピについても同様であることを証明せよ．
3. 合成射 $g \circ f$ がモニックならば f もそうである．g についてもこれは正しいか？
4. 包含 $\mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$ は圏 **Rng** でエピであることを示せ．
5. **Grp** ですべてのエピ射が全射であることを示せ（ヒント：$\varphi : G \to H$ が H でない像 M を持つとき，M が指数 (index) 2 を持つならば因子群 (factor group) H/M を用いよ．そうでなければ，$\mathrm{Perm}\, H$ を集合 H のすべての置換からなる群として，M の三つの異なる余集合 (coset) M, Mu, Mv を選び，$x \in M$ ならば $\sigma(xu) = xv$, $\sigma(xv) = xu$，そうでないものには σ を恒等置換とすることにより $\sigma \in \mathrm{Perm}\, M$ を定義せよ．$\psi : H \to \mathrm{Perm}\, H$ は各 h を，左から h を掛ける ψ_h に写すものとし，$\psi'_h = \sigma^{-1}\psi_h\sigma$ とする．このとき $\psi\varphi = \psi'\varphi$ だが $\psi \neq \psi'$ である）．
6. **Set** ですべての冪等射が分裂していることを示せ．
7. 圏 C における射 $f : a \to b$ が**正則** (regular) であるとは，$fgf = f$ となる射 $g : b \to a$ が存在することである．左もしくは右逆射を持つならば f が正則であることを示し，**Set** で $a \neq \emptyset$ であるすべての射 f が正則であることを証明せよ．
8. X を集合，$e \in X$, $t : X \to X$ として，$\langle X, e, t\rangle$ を対象とし，X から X' への関数 f で $fe = e'$ と $ft = t'f$ となるものを射 $f : \langle X, e, t\rangle \to \langle X', e', t'\rangle$ とする圏を考える．この圏は X が自然数の集合，$e = 0$, t が後者関数 (successor function) であるような始対象を持つことを証明せよ．
9. 函手 $T : C \to B$ が忠実で Tf がモニックであるとき，f がモニックであること

13 ［訳注］この性質を弧状連結 (arcwise connected) と言う．

を証明せよ．

6 基礎論

圏論の主な目標の一つは，すべての群の「集合」や任意の二つの群の間のすべての準同型の「集合」のような数学的対象全体の性質を議論することである．ところで群はある構造が付け加えられた集合と見なすのが普通であるので，ここで提案されているのはある与えられた構造を持つすべての集合を考えるということである．これは，集合 x の性質 $\varphi(x)$ が与えられたときにこの性質を持つすべての集合 x からなる集合 $\{x \mid \varphi(x)\}$ を形成する，という内包原理 (comprehension principle) を適用することになる．しかしながらこういった原理はこのように一般的には適用できない．なぜなら，自分自身を要素として持たない集合すべてからなる集合のような，いくつかの有名な矛盾する集合につながるからである．

このため，通常の要素関係 $\in$ を用いる素朴集合論で標準的に行われるのは内包原理の適用を制限することである．まず集合 u, v が与えられたとき，集合 $\{u, v\}$（要素としてちょうど u と v を持つ集合），順序対 $\langle u, v\rangle$，ある無限集合（すべての有限順序数の集合 $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$），そして

カルテシアン積	$u \times v = \{\langle x, y\rangle \mid x \in u$ かつ $y \in v\}$,
冪集合	$\mathcal{P}u = \{v \mid v \subset u\}$,
（集合の集合 x の）和集合	$\bigcup x = \{y \mid$ ある $z \in x$ について $y \in z\}$

の形成は許す．

最後に，性質 $\phi(x)$（技術的に言うと，x，要素関係，および「すべての集合 t について」や「ある集合 t が存在して」を含む通常の論理記号を用いて表現される性質）と集合 u が与えられたとき，

$$u \text{ の要素についての内包：} \quad \{x \mid x \in u \text{ かつ } \phi(x)\}$$

を許す．

言葉で言えばこうなる：既に与えられている集合 u の要素であり与えられた性質 ϕ を持つすべての x からなる集合を許す．

これを実行するには，ユニバースの存在というもう一つの仮定を加える．ユニバース (universe) は集合 U で以下の（いくらか冗長な）性質を持つものと定義する：

(i) $x \in u \in U$ ならば $x \in U$,
(ii) $u \in U$ かつ $v \in U$ ならば $\{u, v\}, \langle u, v\rangle, u \times v \in U$,
(iii) $x \in U$ ならば $\mathcal{P}x \in U$ かつ $\bigcup x \in U$,
(iv) $\omega \in U$（ここで $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ はすべての有限順序数の集合），
(v) もし $f : a \to b$ が全射的関数で $a \in U$ かつ $b \subset U$ ならば，$b \in U$.

U がこれらで閉じているという性質は，U の要素に集合論のどのような標準的演算を適用してもその結果が U の要素になるということを保証する．特に $\omega \in U$ によって，U が通常用いられる実数全体の集合や関連する無限集合もすべて含むことになる．すると，望んでいる大きな圏の構築には U 自身や U から形成される集合が用いられる一方で,「普通の」数学は U の内部で（すなわち U の要素の上で）これとは排他的に実行されると見なすことができる．

いまユニバース U を固定しておいて，集合 $u \in U$ を**小さな集合** (small set) と呼ぶことにする．よってユニバース U はすべての小さな集合からなる集合である．同様に，u と v が小さな集合であるとき関数 $f : u \to v$ を**小さい** (small) と言うことにする．このとき f 自身を小さな集合と見なすことができる —— たとえば，$G_f \subset u \times v$ を $x \in u$, $y = fx$ を満たすすべての $\langle x, y\rangle$ からなる通常の集合とすると，順序列 $\langle u, G_f, v\rangle$ と見なすことができる．よって制限された内包原理は小さな関数全体からなる集合 A の構築を許す．なぜならこれらの関数はすべて U の要素だからである．いますべての小さな集合からなる圏 **Set** を，U（小さな集合全体の集合）が対象の集合であり A（小さな関数全体の集合）が射の集合であるような圏と定義する．以後 **Set** はいつもこの圏を表すことにしよう．

同様に**小さな群** (small group) とは群構造を持つ小さな集合である．すなわち順序対 $\langle u, m\rangle$ で，u は小さな集合であり，$m : u \times u \to u$ は通常の群の公理を満たす関数（u 上の二項演算子）である．任意の小さな群は U の要素であるので，すべての小さな群からなる集合と二つの小さな群の間のすべて

の準同型の集合を形成しても構わない．それらはすべての小さな群からなる圏 **Grp** を構成する．

同じプロセスで他の型のすべての小さな数学的対象からなる圏を構築しよう．たとえば，圏が小さいとはその射の集合と対象の集合が両方とも小さな集合であるということなので，早速すべての小さな圏からなる圏 **Cat** を形成しよう．しかしながら **Set** は小さな圏ではないことに注意されたい．なぜならその対象の集合 U は小さな集合ではない（さもなくば $U \in U$ となり，これは無限鎖 $\cdots x_n \in x_{n-1} \in x_{n-2} \in \cdots \in x_0$ が存在しないことを主張する正則公理に反する）からである．同様に **Grp** も小さくない．

このような基礎の記述は公理的な形にすることができる．我々は集合論の標準的なツェルメロ–フレンケル公理系とそれに加えてユニバースとなる集合 U の存在を仮定している．(要素関係 $\in$ についての）ツェルメロ–フレンケル公理系は外延性 (extensionality)（要素が同じ集合は等しい），空集合の存在，すべての集合 u, v, x について集合 $\{u,v\}$, $\langle u,v\rangle$, $\mathcal{P}u$, $\bigcup x$ の存在，無限公理 (the axiom of infinity)，選択公理 (the axiom of choice)，正則公理 (the axiom of regularity)，そして次の置換公理 (the replacement axiom) からなる：

置換．a を集合とし，$\phi(x,y)$ を a の要素 x について関数的な，すなわち $x \in a$ について $\phi(x,y)$ と $\phi(x,y')$ ならば $y = y'$ であり各 $x \in a$ について $\phi(x,y)$ となる y が存在するような性質とする．このときある $x \in a$ について $\phi(x,y)$ が成り立つようなすべての y からなる集合が存在する．

大まかに言えば，置換公理は「関数」ϕ による集合 a の像が集合であると述べている．以前に述べたような内包公理は置換公理から従うことが示せる．さらにユニバース U を定義する条件から，$x \in U$ であるすべての集合 x（すべての小さな集合）がツェルメロ–フレンケル公理系を満足することが従う —— たとえばユニバースの定義の条件 (v) は置換に対応する．圏論の通常の目的であれば一つのユニバースという我々の仮定で十分であることがわかるだろう．

何人かの著者は代わりに集合と「クラス」を仮定し，これらの概念のためにゲーデル–ベルナイス公理系 (Gödel-Bernays axioms) を用いている．これを説明するために，クラス (class) C をユニバース U の任意の部分集合と定

義しよう．$x \in u \in U$ から $x \in U$ が従うので U のすべての要素は U の部分集合でもあり，それゆえすべての小さな集合はクラスでもある．しかし，逆に（U 自身のような）いくつかのクラスは小さな集合ではない．この後者は**真クラス** (proper class) と呼ばれる．合わせると，小さな集合とクラスは標準的なゲーデル–ベルナイス公理系を満たす（Gödel [1940] を見られたい）．

大きな圏 (large category) とは対象の集合と射の集合がどちらもクラスであるような圏である（真クラスでもそうでなくてもよい）．小さな集合とすべてのクラスだけを用いれば，必要となる圏の多くを記述することができる ── 特に，我々の定義した圏 **Set**, **Grp** 等は真クラスであり，この意味で大きな圏である．当初，圏論は小さな圏と大きな圏の研究に限定されていた（それでゲーデル–ベルナイス公理系に基づいていた）．しかしながら，クラスでない圏を形成する場合も多くなっていくだろう．そのようなものの一つはすべてのクラスからなる圏 **Cls** である．その対象はすべてのクラスであり，射はクラス間のすべての関数 $f : C \to C'$ である．このとき **Cls** の対象の集合は，U のすべての部分集合の集合 $\mathcal{P}(U)$ である．これはクラスではない．実際，その基数 (cardinal number) はユニバース U の基数よりも大きい．もう一つの有用な圏はすべての大きな圏からなる圏 $\mathbf{Cat}'$ である．これもクラスではない．

次節以後では，選択されているユニバースの表記 U を落として単に小さな集合，クラス，集合と言うことにしよう．ここで「集合」は小さな集合とクラスを含み，同時に $\mathcal{P}(U)$, $\mathcal{PP}(U)$, $\{U\}$ などのような他の多くの集合も含むことに注意されたい．特に $\{U\}$ がただ一つの要素（すなわちユニバース U）を持つ集合であることに注目して欲しい．これは直観的にはこのように非常に「小さい」が，我々の意味での小さな集合ではない．$\{U\} \in U$ は $U \in U$ を導くので正則公理に矛盾する．このように，我々にとっての「小さな集合」とはユニバースの要素を意味し，小さな基数を持つ集合を意味するのではない．

一つのユニバースによる基礎は，集合論の内部ですべての小さな集合の圏やすべての小さな群の圏について議論する厳密な方法を提供するが，**すべての集合のメタ圏**や**すべての群のメタ圏**のようないくつかのメタ圏を表現する集合を提供していない．グロタンディクは別の装置を用いている．彼は任意の集合 X について，$X \in U$ となるあるユニバース U が存在すると仮定し

ている．このより強い仮定は明らかに，各ユニバース U について U の要素であるすべての群からなる圏を提供する．しかしながら，これもすべての群からなる圏を提供してはいない．この理由により，集合論に基づかない圏論の（そして数学すべての）基礎について著しい議論が行われてきた．これが，公理を単に「C の対象」,「C の射」,「合成」,「恒等射」,「ドメイン」,「コドメイン」という未定義術語上の一階の公理と見なすことにより，最初に集合論を用いない形式で圏 C の定義を与えた理由である[14]．このスタイルで，すべての集合からなる圏の初等的な（すなわち一階の）理論の公理を，要素関係についての通常の公理の代わりとして —— ある「初等トポス (elementary topos)」として —— 与えることができる（Mac Lane-Moerdijk [1992] を参照[15]）．

演習問題

1. ユニバース U と，ドメインが $I \in U$ の関数 $f : I \to b$ で $i \in I$ に対する値が U の要素 f_i となるものが与えられているとき，通常のカルテシアン積 $\prod_i f_i$ が U の要素であることを証明せよ．
2. (a) ユニバース U と，ドメインが $I \in U$ の関数 $f : I \to b$ で $i \in I$ に対する値が U の要素 f_i となるものが与えられているとき，通常の和集合 $\bigcup_i f_i$ が U の集合であることを示せ．
   (b) この一つの U の閉包性でユニバースの定義における条件 (v) と $x \in U$ から $\bigcup x \in U$ が従うという条件を置き換えてもよいことを示せ．

7 大きな圏

様々な関連で現れる多くの例では，圏は与えられた構造を持つすべての（小さな）数学的対象とその構造を保存する関数である射からなる．有用なこういった例をそのモニック射と共に挙げてみよう．

---

[14] ［訳注］本章第 1 節のメタ圏の公理的定義のこと．ここで述べている立場からはメタ圏が圏となる．一階とは一階述語論理式で記述されるという意味である．より厳密な取り扱いについては Lambek-Scott [1986] も参照されたい．

[15] ［訳注］特に第 VI 章第 10 節．

すべての小さなアーベル群からなる圏 **Ab** は，すべての小さな（加法的）アーベル群 $A, B, \ldots$ が対象であり，すべてのアーベル群の準同型 $f : A \to B$ が射であり，通常の合成を持つ．この圏では射がモニックであるのはそれが単射（一対一かつ中への準同型）であるときであり，かつそのときに限る．同じく全射（上への準同型）は明らかにエピである．逆に射としてエピであるような準同型 $f : A \to B$ は上への関数である．なぜなら，もしそうでなければ商群 B/fA が零群でないので射影 p と零射 0 という二つの異なるモルフィズム $B \to B/fA$ が存在して $pf = 0 = 0f$ となり，f がエピという仮定に矛盾するからである．**Ab** では零群は始対象かつ終対象である．

小さな環 R は小さな集合で環の通常の公理 —— 乗法の両側恒等元（＝単位元）1 の存在を含む —— を満たす加法と乗法の二項演算を伴うものである．**Rng** はすべての小さな環の圏を表すことにしよう．対象は小さな環 R で射は環の準同型（モルフィズム）$f : R \to S$ である —— 環のモルフィズムは R の単位元を S の単位元に写すことを仮定している．この圏では零環は終対象であり，整数の環 $\mathbf{Z}$ は始対象である．なぜなら $\mathbf{Z} \to R$ は $1 \in \mathbf{Z}$ を環 R の単位元に写す一意的な射だからである．モニック射はちょうど環の単射である．環のすべての全射は射としてエピであるが，$\mathbf{Z}$ の有理数体 $\mathbf{Q}$ の中への包含 $\mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$ はエピなのに全射ではない．

R を任意の小さな環とすると，圏 R-**Mod** はすべての小さな左 R-加群 A, $B, \ldots$ を対象に持ち，すべての R-加群の準同型（R-線型写像）$f : A \to B$ を射に持つ．この圏ではモニック射は単射であり，エピ射は全射であり，零加群は始対象かつ終対象である．F を体とすると，圏 F-**Mod** はすべての F 上のベクトル空間（線型空間）からなる圏であり，$\mathbf{Vct}_F$ とも書かれる．**Mod**-R によりすべての小さな右 R-加群からなる圏を表す．R と S を二つの環とすると，R-**Mod**-S はすべての小さな R-S-双加群 (R-S-bimodule)（左 R-，右 S-加群 A ですべての $r \in R$, $a \in A$, $s \in S$ について $r(as) = (ra)s$ を満たすもの）からなる圏である．同様にして，与えられた任意のタイプの小さな代数的対象の圏を構築することができる．

位相空間の圏 **Top** は対象としてすべての小さな位相空間 $X, Y, \ldots$ を持ち，射としてすべての連続写像 $f : X \to Y$ を持つ．これもモニック射は単射でありエピ射は全射である．一点空間が終対象であり空の空間が始対象で

ある．同様にすべての小さなハウスドルフ空間からなる圏やすべての小さなコンパクトハウスドルフ空間からなる圏を作ることができる．

圏 **Toph** は対象としてすべての小さな位相空間 $X, Y, \ldots$ を持つが，射 $\alpha : X \to Y$ は連続写像 $f : X \to Y$ のホモトピー類である．言い換えれば，二つのホモトピックな写像 $f \simeq g : X \to Y$ は X から Y への同じモルフィズムを決定する．モルフィズムの合成は写像のホモトピー類の通常の合成である．この圏では単射のホモトピー類は必ずしもモニック射である必要はない．たとえば円から円盤への（その円盤の境界の円に写す）単射について見てみればわかる．この圏 **Toph** はホモトピー理論で自然に現れるが，これは圏の射が必ずしも関数と同様なものである必要はないことを示している．ホモトピー理論で有用な圏は他にも数多くある．たとえば，単体的集合の CW-複体の圏，コンパクト生成空間（第 VII 章第 8 節を見られたい）の圏，カン複体の圏などがある．

$\mathbf{Set}_*$ は小さな基点付き集合の圏を示すことにする．**基点付き集合** (pointed set, based set) とは，空でない集合 P であって一つの要素が選ばれているものである．この要素を $*$ もしくは $*_P$ と書き，P の「基点 (base point)」と呼ぶ．基点付き集合の写像 $f : P \to Q$ は集合 P から集合 Q への関数であって基点を基点に写すものである．すなわち $f(*_P) = *_Q$ を満たす．基点付き集合はこれらの写像をモルフィズムとして圏 $\mathbf{Set}_*$ を構成する．この圏ではちょうど一点（基点）を持つ集合 $\{*\}$ が始対象かつ終対象である．モルフィズム f が $\mathbf{Set}_*$ でモニックであるのは左逆射が存在するときであり，かつそのときに限る．エピであるのは右逆射が存在するときであり，かつそのときに限る．可逆であるのはモニックかつエピであるときであり，かつそのときに限る．

同様に $\mathbf{Top}_*$ は小さな基点付き位相空間のなす圏を表す．すなわち，対象は指定された基点 $*$ を持つ空間 X，モルフィズムは X の基点を Y の基点に写す連続写像 $f : X \to Y$ である．同様に $\mathbf{Toph}_*$ は基点付き空間を対象とし基点を保つ連続写像のホモトピー類を射とする圏である（ここでホモトピーも基点を保つようになっている）．どちらの圏もホモトピー理論で現れる．そこでは空間の基本群や高次ホモトピー群を定義するのにいつでも基点の選択が必要となる．第 5 節を参照されたい．

二項関係は圏 **Rel** の射と見なすことができる．その対象はすべての小さい集合 $X, Y, \ldots$ であり射 $R : X \to Y$ は X と Y の上の二項関係，すなわち部分集合 $R \subset X \times Y$ である．もし $S : Y \to Z$ がそのような別の関係であれば合成関係 $S \circ R : X \to Z$ は通常の関係積 (relative product)

$$S \circ R = \{\langle x, z\rangle \mid \text{ある } y \in Y \text{ について } \langle x, y\rangle \in R \text{ かつ } \langle y, z\rangle \in S\}$$

として定義される．恒等射 $X \to X$ は X 上の恒等関係，すなわちすべての $x \in X$ に対する $\langle x, x\rangle$ からなる関係である．圏の公理は明らかに成り立つ．この圏 **Rel** は **Set** を同じ対象上の部分圏として含む．各関数 $f : X \to Y$ はすべての $x \in X$ についての対 $\langle x, fx\rangle$ からなる関係として翻訳される．しかし **Rel** は付加的な構造を持つ．すなわち各 $R : X \to Y$ について，すべての $\langle x, y\rangle \in R$ に対する $\langle y, x\rangle$ からなる逆関係 (converse relation) $R^{\#} : Y \to X$ が存在する．

具体圏 (concrete category) とは対 $\langle C, U\rangle$ で，ここで C は圏であり，U は忠実函手 $U : C \to \mathbf{Set}$ である．U が忠実であるので C の各射 f を関数 Uf と同一視することができる．この用語を使えば具体圏は圏 C で，各対象 c が「基底 (underlying)」集合 Uc を装備し，各射 $f : b \to c$ が実際の関数 $Ub \to Uc$ であり，射の合成が関数の合成であるようなものとして記述できる．上で記述された明示的な大きな圏の多くはこの意味で具体圏であり，それぞれ自明な忘却函手 U に関するものであるが，このことは **Toph** や **Rel** については当てはまらない．その用途のためには，圏の概念は具体圏の概念よりも単純（そしてより「抽象的」）である．

8　Hom 集合

圏 C の対象 a と b について，hom 集合

$$\hom_C(a, b) = \{f \mid f \text{ は } C \text{ の射 } f : a \to b\}$$

はドメインが a でコドメインが b のすべての射からなる．この集合の記法は

$$\hom_C(a, b) = C(a, b) = \hom(a, b) = (a, b) = (a, b)_C$$

のようにしばしば様々に省略される．

圏は hom 集合を使って以下のように定義できる．小さな圏は以下のデータで与えられる：

(i) 対象 a, b, c, ... の集合．

(ii) 対象の各順序対 $\langle a, b\rangle$ に集合 $\hom(a, b)$ を割り当てる関数．

(iii) 対象の各順序付き三つ組 $\langle a, b, c\rangle$ について，

$$\hom(b, c) \times \hom(a, b) \to \hom(a, c)$$

という関数．これは合成と呼ばれ，$g \in \hom(b, c)$, $f \in \hom(a, b)$ について $\langle g, f\rangle \mapsto g \circ f$ と書かれる．

(iv) 各対象 b について要素 $1_b \in \hom(b, b)$．これは b の恒等射と呼ばれる．

これらのデータはよく知られている結合性と単位元律の公理，すなわち本章第 1 節の (1) と (2) を満たし，それに加えて次の「排反 (disjointness)」公理を満たすことが要求される：

(v) $\langle a, b\rangle \neq \langle a', b'\rangle$ ならば $\hom(a, b) \cap \hom(a', b') = \emptyset$ である．ここで $\emptyset$ は空集合である．

特に結合性公理は，各射が明らかなやり方で合成により与えられるときに以下の図式が可換になるという要求に言い換えることができる．

$$\begin{array}{ccc}
\hom(c, d) \times \hom(b, c) \times \hom(a, b) & \longrightarrow & \hom(b, d) \times \hom(a, b) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\hom(c, d) \times \hom(a, c) & \longrightarrow & \hom(a, d)
\end{array}$$

圏のこの定義は第 2 節のもとの定義と同値である．上の公理 (v) は「異なる」hom 集合は互いに素であるということを要求している．これには，各射が明確なドメインと明確なコドメインを持つことを保証するということが含まれる．万一この公理がある例で成り立たないとしても，それらが互いに素になるように hom 集合を調整することにより直ちに回復させることができる．たとえばもとの各集合 $\hom(a, b)$ を集合 $\{a\} \times \hom(a, b) \times \{b\}$ で置き換えることができる．これは各 $f \in \hom(a, b)$ をドメイン a とコドメイン b で「ラベル付け」することになる．この公理 (v) は省略する著者もいる．

函手 $T : C \to B$ は，$T_{c,c}1_c = 1_{Tc}$ を満たす関数

$$T_{c,c'} : C(c,c') \to B(Tc,Tc')$$

の集まり（すなわち $f \in C(c,c')$ について関数 $f \mapsto Tf$）であって

$$\begin{array}{ccc} C(c',c'') \times C(c,c') & \longrightarrow & C(c,c'') \\ \downarrow{\scriptstyle T_{c',c''} \times T_{c,c'}} & & \downarrow{\scriptstyle T_{c,c''}} \\ B(Tc',Tc'') \times B(Tc,Tc') & \longrightarrow & B(Tc,Tc'') \end{array}$$

で水平な射を B および C の合成とするとすべての図式が可換になるようなものを伴う（通常の）対象関数 T として hom 集合を用いて記述することができる．

関数 $C(c,c') \to B(Sc,Tc')$ を用いて自然変換 $\tau : S \dot{\to} T$ を記述するのは読者に任せる．

関連する多くの例では圏の hom 集合そのものがある構造を持つ．たとえばある決まった体の上のベクトル空間 $V, W, \ldots$ からなる圏では各 $\hom(V,W)$ そのものが（すべての線型変換 $V \to W$ からなる）ベクトル空間である．最も単純なこういった例は hom 集合がアーベル群の例である．形式的に Ab-圏 (Ab-category)（または**前加法** (preadditive) 圏と呼ばれる）を各 hom 集合 $A(a,b)$ が加法的アーベル群であり合成が双線型，すなわち射 $f, f' : a \to b$ と $g, g' : b \to c$ について

$$(g+g') \circ (f+f') = g \circ f + g \circ f' + g' \circ f + g' \circ f'$$

であるような圏 A と定義する．たとえば **Ab**, R-**Mod**, **Mod**-R などはすべて Ab-圏である．

合成 $\langle g, f \rangle \mapsto g \circ f$ は**双線型** (bilinear)

$$A(b,c) \times A(a,b) \to A(a,c)$$

であるので，（テンソル積 $\otimes = \otimes_{\mathbf{Z}}$ を使って）**線型写像**

$$A(b,c) \otimes A(a,b) \to A(a,c)$$

として書くこともできて，Ab-圏 A は（前もって圏であると仮定することな

く）これらの用語で完全に記述できる．したがって Ab-圏は次のデータにより与えられる：

(i) 対象 a, b, c, ... の集合．
(ii) 対象の各順序対 $\langle b, c\rangle$ にアーベル群 $A(b,c)$ を割り当てる関数．
(iii) 対象の各順序付き三つ組 $\langle a, b, c\rangle$ について

$$A(b,c) \otimes A(a,b) \to A(a,c)$$

というアーベル群の射．これは合成と呼ばれ，$g \otimes f \mapsto g \circ f$ と書かれる．
(iv) 各対象について射 $\mathbf{Z} \to A(a,a)$.（ここで $\mathbf{Z}$ は整数の加法的アーベル群である．この射は $1 \in \mathbf{Z}$ の像によって完全に決定されるので，1_a と書いてよい.）

これらのデータは，本章第1節の (1) と (2) もしくは図式で述べられている合成の結合性と単位元律を満たすことが要求される．Ab-圏の定義は hom 集合による圏の定義とちょうど同じようになる．**Set** は **Ab** で置き換えられ，集合のカルテシアン積 $\times$ は **Ab** のテンソル積で置き換えられ，一点集合 $\{*\}$ は $\mathbf{Z}$ で置き換えられる．この定義から $\otimes$ のような乗法とこの乗法についての $\mathbf{Z}$ のような単位元を装備する **Ab** のような圏に属する hom 対象 $A(b,c)$ を持つ圏 A への明らかな一般化が存在する．これは「豊穣圏 (enriched category)」と呼ばれる (Kelly [1982]).

A と B が Ab-圏ならば函手 $T : A \to B$ は，すべての関数 $T : A(a,a') \to B(Ta, Ta')$ がアーベル群の準同型であるとき，すなわちすべての平行な対 f と f' について $T(f+f') = Tf + Tf'$ であるとき，**加法的** (additive) と言われる．**Ab-cat** は加法的函手を射とするすべての小さな Ab-圏の圏を表すことにしよう．

注釈

これらの注釈は，以後の章末にあるものと同様に，我々の主題の背景と展望についての非公式な所見を参考文献への参照を交えて述べたものである（たとえば Pétard [1980b] は Pétard により 1980 年に発表された二番目の論文を参照している）．

関数を射で表現するという基本的アイデアは 1940 年頃に位相幾何学で，おそらく

は W. フレヴィッチによる相対ホモトピー群についての論文か講義において最初に現れた．Hurewicz [1941] を見られたい．

彼の第一歩は直ちに R. H. Fox（Fox [1943] を見られたい）や N. E. スティーンロッドの注意を引いた．彼の論文 Steenrod [1941] は射と（暗黙的に）函手を用いていた．Hurewicz-Steenrod [1941] も見られたい．関数の補助的な表記 $f(X) \subset Y$ はすぐに射 $f : X \to Y$ に置き換わった．これは位相幾何学の中心的な関心をうまく表現していた．こうして表記（射）は概念（圏）へとつながっていったのである．

可換図式もおそらくはフレヴィッチにより最初に用いられた．

圏，函手，自然変換そのものは Eilenberg-Mac Lane [1942a] によりチェックコホモロジー (Čech cohomology) における普遍係数定理のための（自然変換を介した）極限の研究において発見された．この論文で可換図式は（おそらくは初めて）印刷された形で現れた．Ext は最初に考えられた函手の一つである．圏の独立した直接的な扱いは Eilenberg-Mac Lane [1945] において現れた．ところで，このぐらい一般的な概念を発見するのは専ら厚かましくも思弁的な抽象を行うことを厭わない気持ちであり，この場合，喜んで哲学者から言葉を盗んでいることによって裏付けられている．「圏 (Category)」はアリストテレスとカントから,「函手 (Functor)」はカルナップから (*Logische Syntax der Sprache*)，そして「自然変換 (natural transformation)」は当時流布していた非公式な用語から取られている．当初圏は専ら言語として，ホモロジーとコホモロジー理論のアイレンバーグ–スティーンロッド公理系において著しくかつ効果的に用いられていた．近年盛んに用いられるようになるにつれて，適切な基礎を問う動きが表立ってきている．この点で専門家はいまだ合意に至っていない．「一つのユニバース」という我々の現在の仮定は妥当な一時しのぎであり，将来の予見ではない．

圏論ではすべての型の数学的対象に「モルフィズムは何か」と尋ねる．これは対象と同時にこれらのモルフィズムが記述されるべきであることを示唆している．しかしながら，圏論研究者は普通 **Set** や **Cat** のように対象の共通する名前によりそれらの大きな圏に名前を付ける．Ehresmann [1965] と彼のスクールだけが大胆にもその射の共通する名前により各圏に名前を付けている．我々の **Cat** は彼らの函手の圏である．モルフィズム（準同型）を強調することは主としてエミー・ネーターからきている．彼女は群や環における準同型の使用を強調した．

第II章　圏の構築

1　双対性

圏の双対性とは「すべての射を逆にする」過程である．この過程の正確な記述は本節で公理的基礎に基づいてなされ，次節で集合論的基礎に基づいてなされる．したがって本節のためには，圏は（対象と射の）集合と関数（ドメイン，コドメイン，合成）で記述されるのではなく，第I章第1節のように公理的に記述されることになる．

抽象圏 (abstract category) の**初等的理論** (elementary theory) (ETAC) とは，対象についての文字 a, b, c, ... と射についての文字 f, g, h, ... を含むある言明 Σ からなる．これらの言明は，通常の圏論の未定義術語を含む原子的**言明** (statement) から組み立てられるものである．したがって原子的言明とは「a は f のドメインである」,「b は f のコドメインである」,「i は a の恒等射である」,「g は f と合成可能であり h がその合成射である」,「$a = b$」,「$f = g$」といったものである．これらの原子的言明は「$a = \mathrm{dom}\, f$」,「$h = g \circ f$」のようによく知っている方法で等式として書くこともできる．言明 Σ は，上に列挙されたタイプの原子的言明から通常の命題論理演算子（かつ，または，でない，ならば，のときであり，かつそのときに限る）と通常の限量子 (quantifier) （「すべての a について」,「すべての f について」,「ある a が存在して...」,「ある f が存在して...」）を用いて通常のやり方で組み立てられる任意の成句（整合論理式 (well formed formula)）であると定義される．したがって「$f : a \to b$」は「a は f のドメインでありかつ b は f の

コドメインである」という言明のために我々が採用した略記法である．

文 (sentence) とはすべての変数が限量化された (quantified)（すなわち，すべての変数が「束縛された (bound)」，どの変数も「自由 (free) 」でない）言明である．たとえば「すべての f についてある a と b が存在して $f : a \to b$ となる」というのは文である（実際には公理でありすべての圏で正しい）．(第 I 章第 1 節で与えられたような）ETAC の公理はこのようなある文である．

ETAC の任意の言明 Σ の**双対** (dual) は Σ 全体で以下の置き換えを行うことにより作られる．すなわち「ドメイン」を「コドメイン」に置き換え,「コドメイン」を「ドメイン」に置き換え,「h は g と f の合成である」を「h は f と g の合成である」に置き換えて，射や合成を逆向きにする．論理（かつ，または，...）は変えない．この置き換えによって以下の表が与えられる（さらに詳しい表は第 IV 章第 3 節の演習問題 1 に出てくる）．

言明 Σ	双対な言明 Σ^*
$f : a \to b$	$f : b \to a$
$a = \operatorname{dom} f$	$a = \operatorname{cod} f$
$i = 1_a$	$i = 1_a$
$h = g \circ f$	$h = f \circ g$
f はモニック	f はエピ
u は h の右逆射	u は h の左逆射
f は可逆	f は可逆
t は終対象	t は始対象

双対の双対 (Σ^{**}) は元の言明 (Σ) であることに注意されたい．言明が図式を含んでいるとき，双対な言明はその図式のすべての射を逆向きにしたものを含む．

圏の各公理の双対はまた公理になる．ゆえに，公理から得られる任意の圏についての定理の任意の証明において，各言明をその双対に置き換えると（双対な結論の）正しい証明が得られる．これを**双対性原理** (duality principle) と言う．すなわち抽象圏の初等的理論の言明 Σ が公理の帰結であれば，双対の言明 Σ^* もそうである．たとえば我々は，圏の終対象が存在すれば同型を除いて一意的であるという（初等的）定理に言及した．よって，始対象が存

在すれば同型を除いて一意的である，という双対な定理を得る．定理がもっと複雑であれば，双対性原理は双対な定理を（一度に）得るための便利な方法である．双対な定理の証明は与える必要がない．通常は双対な定理については定式化も読者に任せる．

双対性原理は複数の圏やそれらの間の函手を含む言明にも適用できる．最も単純な（そして典型的な）場合は一つの函手の，すなわち二つの圏 C と B と函手 $T : C \to B$ の初等的理論である．この理論についての原子的言明とは，圏 C について上に列挙された言明とそれに対応する圏 B についての列挙，そして同様に T の対象関数と射関数が C の対象 c と射 f について取る値を与える言明「$Tc = b$」または「$Tf = h$」である．その公理には圏 C と B の公理が含まれ，T が函手であることを主張する言明 $T(gf) = (Tg)(Tf)$ と $T(1_a) = 1_{Ta}$ も含まれる．言明の双対は C と B を参照する原子部分を同時に双対化して（すなわち C と B の射を反対向きにして）作られる．T が函手であるという言明は自己双対的であるので，上の双対性原理はやはり正しい．

なお，**複数の圏やそれらの間の函手を含む言明の双対性は各圏の射を反転させるが函手は反転させない**，ということを強調しておく．

2 反変性と逆

さらに各圏 C について逆 (opposite) 圏 C^{op} を割り当てる．C^{op} の対象は C の対象であり，C^{op} の射は射 f^{op} である．これは C の射 f との一対一対応 $f \mapsto f^{\mathrm{op}}$ による．C の各射 $f : a \to b$ について，対応する f^{op} のドメインとコドメインは $f^{\mathrm{op}} : b \to a$（向きが逆）になる．合成射 $f^{\mathrm{op}} g^{\mathrm{op}} = (gf)^{\mathrm{op}}$ が C^{op} で定義されるのは，ちょうど合成 gf が C で定義されるときである．これより明らかに C^{op} は圏になる．さらに，f^{op} のドメインは f のコドメインであり，f^{op} がモニックであるのは，f がエピであるときであり，かつそのときに限る，等々．実際この過程では C についての任意の言明 Σ を C^{op} についての双対な言明 Σ^* に変換する．詳しく言えば，原子的言明からの Σ の構成についての明らかな帰納法により，もし Σ が抽象圏の初等的理論の自由

変数 $f, g, \ldots$ を含む任意の言明ならば，Σ が圏 C の射 $f, g, \ldots$ について正しいのは逆圏 C^{op} の射 $f^{\mathrm{op}}, g^{\mathrm{op}}, \ldots$ について双対な言明 Σ^* が正しいときであり，かつそのときに限る，ということが証明される．特に文 Σ が C^{op} において正しいのは双対な文 Σ^* が C において正しいときであり，かつそのときに限る．この所見により，ある性質 Σ の双対を，逆圏に適用された元の性質に翻訳することが可能になる（C^{op} を「双対」圏と呼び $C^{\mathrm{op}} = C^*$ と書く著者もいる）．

$T : C \to B$ が函手であれば，その対象関数 $c \mapsto Tc$ とその射関数 $f \mapsto Tf$ を $f^{\mathrm{op}} \mapsto (Tf)^{\mathrm{op}}$ と書き直したものを合わせると C^{op} から B^{op} への函手が定義される．これを $T^{\mathrm{op}} : C^{\mathrm{op}} \to B^{\mathrm{op}}$ と表す．割り当て $C \mapsto C^{\mathrm{op}}$ と $T \mapsto T^{\mathrm{op}}$ は（共変！）函手 **Cat** $\to$ **Cat** を定義する．

函手 $S : C^{\mathrm{op}} \to B$ を考える．函手の定義により，S は各対象 $c \in C^{\mathrm{op}}$ に B の対象 Sc を割り当て，C^{op} の各射 $f^{\mathrm{op}} : b \to a$ に B の射 $Sf^{\mathrm{op}} : Sb \to Sa$ を割り当て，$f^{\mathrm{op}}g^{\mathrm{op}}$ が定義されているときにはいつでも $S(f^{\mathrm{op}}g^{\mathrm{op}}) = (Sf^{\mathrm{op}})(Sg^{\mathrm{op}})$ が成り立つ．このように記述される函手 S は，Sf^{op} を $\overline{S}f$ と書けば元の圏 C を用いて直接表現することができる．そのとき $\overline{S}$ は C から B への**反変函手** (contravariant functor) であり，各対象 c に対象 $\overline{S}c \in B$ を割り当て，各射 $f : a \to b$ に（逆向きの）射 $\overline{S}f : \overline{S}b \to \overline{S}a$ を割り当て，いずれも

$$\overline{S}(1_c) = 1_{\overline{S}c}\,, \qquad \overline{S}(fg) = (\overline{S}g)(\overline{S}f) \tag{1}$$

を満たす．ただし後者は合成射 fg が C で定義されているときに成り立つ．反変函手の射関数 $\overline{S}$ は合成の順序を反対にすることに注意されたい．特定の反変函手の例はこの形式で，合成を反対にする関数 $\overline{S}$ として，うまい具合に提示することができる．一つの例は **Set** から **Set** への反変な**冪集合**函手 $\overline{P}$ である．各集合 X について，$\overline{P}X = \{S \,|\, S \subset X\}$ は X のすべての部分集合の集合である．各関数 $f : X \to Y$ について，$\overline{P}f : \overline{P}Y \to \overline{P}X$ は各部分集合 $T \subset Y$ をその逆像 $f^{-1}T \subset X$ に写す．もう一つの例は，各ベクトル空間 V にその双対（共役）ベクトル空間 V^* を割り当て，各線型写像 $f : V \to W$ に双対 $f^* : W^* \to V^*$ を割り当てる，というおなじみの過程である．これらの割り当ては（ある決まった体の上の）すべてのベクトル空間からなる圏の

上の反変函手を記述している．

対照的に，以前に第 I 章第 3 節で定義された函手 $T : C \to B$ は，C から B への**共変** (covariant) 函手と呼ばれる．一般的な議論のためには，C 上の B への反変函手 $\overline{S}$ を共変函手 $S : C^{\mathrm{op}} \to B$ として，またときには共変函手 $S^{\mathrm{op}} : C \to B^{\mathrm{op}}$ として表現したほうがはるかに具合がよい．本書では圏（の記号）の間の射（矢印）はいつも，指示された圏の間の共変函手 $T : C \to B$ あるいは $S : C^{\mathrm{op}} \to B$ を表すことにしよう．

hom 集合は共変函手と反変函手の重要な例を提供する．C は小さな hom 集合を持つ圏であって，各 $\hom(a, b) = \{f \mid C \text{ の } f : a \to b\}$ が小さな集合であり，ゆえにすべての小さな集合からなる圏 **Set** の対象であるとする．すると，各対象 $a \in C$ について**共変 hom 函手**

$$C(a, -) = \hom(a, -) : C \to \mathbf{Set} \tag{2}$$

を得る．その対象関数は各対象 b を集合 $\hom(a, b)$ に写し，その射関数は各射 $k : b \to b'$ を関数

$$\hom(a, k) : \hom(a, b) \to \hom(a, b') \tag{3}$$

に写す．これは各 $f : a \to b$ について $f \mapsto k \circ f$ を割り当てることにより定義される．表記を単純化するためにこの関数 $\hom(a, k)$ を k_* と書いて「左側における k との合成」とか「k により誘導される写像」と呼ぶこともある．

各対象 $b \in C$ についての**反変 hom 函手**は共変的に

$$C(-, b) = \hom(-, b) : C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set} \tag{4}$$

のように書く．これは各対象 a を集合 $\hom(a, b)$ に写し，C の各射 $g : a \to a'$ を $f \mapsto f \circ g$ で定義される関数

$$\hom(g, b) : \hom(a', b) \to \hom(a, b) \tag{5}$$

に写す．対象 b を省略してこの関数 $\hom(g, b)$ を単に g^* と書き「右側における g との合成」と呼ぶこともある．したがって，各 $f : a \to b'$ について

$$k_* f = k \circ f \qquad g^* f = f \circ g$$

が成り立つ．

二つのこのような射 $g : a \to a'$ と $k : b \to b'$ について，**Set** における図式

$$\begin{array}{ccc} \hom(a', b) & \xrightarrow{g^*} & \hom(a, b) \\ \downarrow{\scriptstyle k_*} & & \downarrow{\scriptstyle k_*} \\ \hom(a', b') & \xrightarrow{g^*} & \hom(a, b') \end{array} \tag{6}$$

が可換になる．なぜなら，両方の経路とも $f \in \hom(a', b)$ を kfg に写すからである．

これらの hom 函手は小さな hom 集合を持つ圏 C についてのみ定義されてきた．おなじみの大きな圏 **Grp**, **Set**, **Top** 等はこの性質を持つ．この性質を持たない圏を含めるには以下のように進めればよい．すなわち圏 C が与えられたとき，C の射の集合のすべての部分集合を含むように十分大きな集合 V を取る（たとえば，V は C の射の集合の冪集合とすることができるだろう）．$\mathbf{Ens} = \mathbf{Set}_V$ を，対象が V のすべての集合 $X \in V$ であり，射が二つのそのような集合の間のすべての関数 $f : X \to Y$ であり，合成が通常の関数の合成であるような圏とする．そのとき，各 hom 集合 $C(a, b) = \hom(a, b)$ はこの圏 **Ens** の対象であり，よって上の手続きは二つの hom 函手

$$C(a, -) : C \to \mathbf{Ens}\ , \qquad C(-, b) : C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ens} \tag{7}$$

を定義する．特に V がすべての小さな集合からなるユニバースであるとき，$\mathbf{Ens} = \mathbf{Set}$ である．一般に **Ens** は集合からなる（可変な）圏であって，関心のある一つもしくは複数の圏についての hom 函手の受け手の圏として働く．

反変函手には他にも多くの例がある．位相空間 X について，X のすべての開集合 U からなる集合 $\mathbf{Open}(X)$ は，包含により順序付けられるとき半順序となり，したがって圏となる．ちょうど $V \subset U$ であるときに射 $V \to U$ が存在する．$\overline{C}(U)$ はすべての実数値連続関数 $h : U \to \mathbf{R}$ の集合を表すとする．各 h を部分集合 V に制限する割り当て $h \mapsto h|V$ は，各 $V \subset U$ ごとに関数 $\overline{C}(U) \to \overline{C}(V)$ となる．これにより $\overline{C}$ は $\mathbf{Open}(X)$ 上の **Set** への反変函手になる．この函手は X 上の連続関数の芽 (germ) の層 (sheaf) と呼ばれる．滑らかな多様体上では C^∞-微分可能関数の芽の層が同様のやり方で構築される（Mac Lane-Moerdijk [1992] を参照されたい）．

Mod-R は環 R から圏への反変函手である．特に $\varrho : R \to S$ が（小さな）環

の任意の射であるとき，各右 S-加群 B は ϱ に沿った「引き戻し (pull-back)」により右 R-加群 $B\varrho = (\mathrm{Mod}\,\varrho)B$ になる．すなわち各 $r \in R$ は $b{\cdot}r = b{\cdot}(\varrho r)$ によって $b \in B$ に作用する．明らかに $\mathrm{Mod}\,\varrho$ は函手 $\mathbf{Mod}\text{-}S \to \mathbf{Mod}\text{-}R$ であり $\mathrm{Mod}\,(\varrho_1\varrho_2) = (\mathrm{Mod}\,\varrho_2)(\mathrm{Mod}\,\varrho_1)$ であるので，Mod 自体を **Rng** からすべての大きな圏の圏 $\mathbf{Cat}'$ への反変函手と見なすことができる．

すべての環の上のすべての（右）加群からなる圏 **Mod** を作ることもできる．**Mod** の対象は対 $\langle R, A\rangle$ である．ここで R は小さな環であり A は小さな右 R-加群である．モルフィズム $\langle R, A\rangle \to \langle S, B\rangle$ は対 $\langle \varrho, f\rangle$ である．ここで $\varrho : R \to S$ は環のモルフィズムであり $f : A \to (\mathrm{Mod}\,\varrho)B$ は右 R-加群のモルフィズムである．明らかな合成によってこれは圏 **Mod** を与える．射影函手 $\mathbf{Mod} \to \mathbf{Rng}$ は $\langle R, A\rangle \mapsto R$ で与えられる．さらに，この函手と前の函手 $\mathbf{Rng} \to \mathbf{Cat}'$ との関係を研究していくと**ファイバー化圏** (fibered category) の理論につながっていく．(**Mod** は **Rng** 上でファイバー化されており，各 R 上のファイバーは圏 $\mathbf{Mod}\text{-}R$ である.)

3　圏の積

与えられた二つの圏 B と C から B と C の**積** (product) と呼ばれる新しい圏 $B \times C$ を以下のように構築する[1]．$B \times C$ の対象は B の対象 b と C の対象 c の対 $\langle b, c\rangle$ である．$B \times C$ の射 $\langle b, c\rangle \to \langle b', c'\rangle$ は射 $f : b \to b'$ と $g : c \to c'$ の対 $\langle f, g\rangle$ であり，このような二つの射の合成射

$$\langle b, c\rangle \xrightarrow{\langle f, g\rangle} \langle b', c'\rangle \xrightarrow{\langle f', g'\rangle} \langle b'', c''\rangle$$

は B と C における合成射を用いて

$$\langle f', g'\rangle \circ \langle f, g\rangle = \langle f' \circ f,\, g' \circ g\rangle \tag{1}$$

により定義される．積の**射影** (projection) と呼ばれる函手

$$B \xleftarrow{P} B \times C \xrightarrow{Q} C$$

1　［訳注］本節の定義は関数や対の集合論的定義に依存している．特定の集合論に依存しない定義は第 III 章第 4 節で与えられる．

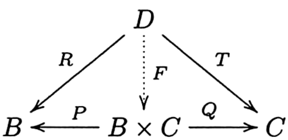
は（対象と）射について

$$P\langle f, g\rangle = f\ , \qquad Q\langle f, g\rangle = g$$

により定義される．これらは以下の性質を持つ．すなわち任意の圏 D と二つの函手

$$B \xleftarrow{R} D \xrightarrow{T} C$$

が与えられたとき，$PF = R, QF = T$ となる一意的な函手 $F : D \to B \times C$ が存在する．明示的に表すとこれら二つの条件は，D の任意の射 h について Fh が $\langle Rh, Th\rangle$ でなければばならない，ということを要求している．逆に，Fh がこの値であれば F は要求される性質を持つ函手になる．F（点線の射）の構築は以下の函手の可換図式によって視覚化することができる．



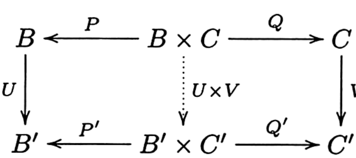
(2)

積圏 (product category) のこの性質は，射影 P と Q が B と C への函手の対の中で「普遍的 (universal)」であることを述べている．これは二つの集合，二つの群，二つの空間の（カルテシアン）積からの射影が持つ同様の性質とちょうど同じである．任意の圏におけるこういった積の一般的な性質は第 III 章で考察する．

二つの函手 $U : B \to B'$ と $V : C \to C'$ は，積 $U \times V : B \times C \to B' \times C'$ を持つ．これは対象と射について明示的に

$$(U \times V)\langle b, c\rangle = \langle Ub, Vc\rangle\ , \qquad (U \times V)\langle f, g\rangle = \langle Uf, Vg\rangle$$

として定義することができる．またその代わりに，この函手 $U \times V$ を（上の図式と同様に）以下の図式を可換にする一意的な函手として記述することもできる．



(3)

したがって積 $\times$ は，圏の各対 $\langle B, C\rangle$ に新しい圏 $B\times C$ を割り当てる関数と函手の各対 $\langle U, V\rangle$ に新しい函手 $U\times V$ を割り当てる関数の対である．さらに，合成 $U'\circ U$ と $V'\circ V$ が定義されるとき，明らかに $(U'\times V')\circ(U\times V) = U'U\times V'V$ となる．ゆえに演算 $\times$ 自体が函手である．より正確には，小さな圏に制限したときに函手

$$\times : \mathbf{Cat} \times \mathbf{Cat} \to \mathbf{Cat}$$

となる．同様な函手 $\mathbf{Grp} \times \mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp}$, $\mathbf{Top} \times \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}$ 等も存在する．

我々の積圏の定義は (2) の中に積圏への函手 $F : D \to B \times C$ の記述を含んでいた．他方，積圏からの函手 $S : B \times C \to D$ は（B と C 上の）**双函手** (bifunctor) もしくは（B と C における）二つの可変対象についての函手と呼ばれる．このような双函手はしばしば生じる．たとえば，二つの集合 X と Y のカルテシアン積 $X \times Y$ は双函手 $\mathbf{Set} \times \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$（の対象関数）である．このように我々の積圏の定義は ── 二つの位相空間の積 $X \times Y$ の定義が「二変数の連続関数」の定義を自動的に与えるのとちょうど同じように ── 「二変数の函手」の定義を自動的に与える．

双函手 S の一つの引数を固定すると，その結果は残った引数についての通常の函手となる．双函手 S 全体はこれらの一変数函手を二つ並べたものから以下のような初等的な方法で決定される．

命題 1 B, C, D を圏とする．すべての対象 $c \in C$ と $b \in B$ について

$$L_c : B \to D, \qquad M_b : C \to D$$

を，すべての b と c について $M_b(c) = L_c(b)$ となるような函手とする．このとき，すべての c について $S(-, c) = L_c$ でありかつすべての b について $S(b, -) = M_b$ となる双函手 $S : B \times C \to D$ が存在するのは，すべての射の対 $f : b \to b'$ と $g : c \to c'$ について

$$M_{b'}g \circ L_c f = L_{c'} f \circ M_b g \tag{4}$$

となるときであり，かつそのときに限る．このとき D におけるこれらの等しい射 (4) は S の射関数の f と g における値 $S(f, g)$ である．

証明　b と c に対応する恒等射も b と c と書くことにすると $B \times C$ における合成の定義 (1) により

$$\langle b', g\rangle \circ \langle f, c\rangle = \langle b'f, gc\rangle = \langle f, g\rangle = \langle fb, c'g\rangle = \langle f, c'\rangle \circ \langle b, g\rangle$$

が示される．函手 S をこの等式に適用すると

$$S(b', g)S(f, c) = S(f, c')S(b, g)$$

が得られる．可換図式ではこの条件は

$$\begin{array}{ccc} S(b,c) & \xrightarrow{S(b,g)} & S(b,c') \\ {\scriptstyle S(f,c)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle S(f,c')} \\ S(b',c) & \xrightarrow{S(b',g)} & S(b',c') \end{array}$$

となる．これは条件 (4) の書き直しに他ならないので条件 (4) は必要である．逆に，すべての L_c と M_b が与えられると，この条件はすべての対 f, g について $S(f, g)$ を定義する．この定義から必要な性質を持つ双函手 S が生じることは確かめることができる．□

三つまたはそれ以上の圏の積や，積圏と逆圏の構築の組合せを作ることもできる．明らかな同型 $(B \times C)^{\mathrm{op}} \cong B^{\mathrm{op}} \times C^{\mathrm{op}}$ が存在する．函手 $B^{\mathrm{op}} \times C \to D$ はしばしば，B について反変で C について共変であり D に値を持つ双函手と呼ばれる．たとえば，C が小さな hom 集合を持つ圏ならば hom 集合はこのような双函手

$$\mathrm{hom} : C^{\mathrm{op}} \times C \to \mathbf{Set}$$

を定義する．実際，第 2 節の可換図式 (6) はちょうど共変と反変の hom 函手

$$\mathrm{hom}(-, c) : C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}, \qquad \mathrm{hom}(b, -) : C \to \mathbf{Set}$$

が定理の条件 (4) を満たすことを示しており，これは hom が双函手となるのに必要である．

次に双函手 $S, S' : B \times C \to D$ の間の自然変換を考える．α を，対象の各対 $b \in B$, $c \in C$ に D の射

$$\alpha(b, c) : S(b, c) \to S'(b, c) \tag{5}$$

を割り当てる関数とする．各 $c \in C$ について，すべての b に対するコンポーネント $\alpha(b,c)$ が函手 $B \to D$ の自然変換

$$\alpha(-,c) : S(-,c) \dot{\to} S'(-,c)$$

を定義するとき，α は b において**自然** (natural) であると呼ぶ．読者は直ちに次の有用な結果を証明できるだろう．

命題 2 双函手 S, S' について (5) で示された関数 α が自然変換 $\alpha : S \dot{\to} S'$（すなわち双函手の自然変換）であるのは，$\alpha(b,c)$ が各 $c \in C$ について b において自然でありかつ各 $b \in B$ について c において自然であるときであり，かつそのときに限る．

このような自然変換は随伴函手（第 IV 章）の基本的定義に現れる．函手 $F : X \to C$ が函手 $G : C \to X$（逆向き）の**左随伴** (left adjoint) であるとは，全単射

$$\hom_C(Fx, c) \cong \hom_X(x, Gc)$$

が存在して $x \in X$ と $c \in C$ において自然であることを言う．ここで（少なくとも X と C が小さな hom 集合を持つときには）$\hom_C(F-,-)$ は双函手で合成

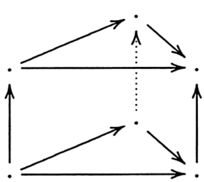
$$X^{\mathrm{op}} \times C \xrightarrow{F^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Id}} C^{\mathrm{op}} \times C \xrightarrow{\hom_C} \mathbf{Set}$$

であり，$\hom_X(-, G-)$ も同様である．

$C \times \mathbf{2}$ の場合には積圏を視覚化できる．ここで $\mathbf{2}$ は恒等射でない射 $0 \to 1$ を一つだけ持つ圏である．明示的には $C \times \mathbf{2}$ は C の二つのコピー $C \times 0$ と $C \times 1$ と，前者と後者をつなぐ射からなる．$C = \mathbf{3}$，すなわち第 I 章第 2 節の三角圏であるときには図のようになる（「対角」射は省略）．

$C \times 1$

$C \times 0$



ここで，函手 $T_0, T_1 : C \to C \times \mathbf{2}$（それぞれ「下部」と「上部」）は，$C$ の

各射 f について $T_0 f = \langle f, 0\rangle$ と $T_1 f = \langle f, 1\rangle$ により定義される．$\downarrow$ を $\mathbf{2}$ の恒等射でない一意的な射 $0 \to 1$ とすると，任意の対象 c について

$$\mu : T_0 \dot{\to} T_1, \qquad \mu c = \langle c, \downarrow\rangle$$

とすることによって $T_0, T_1 : C \to C \times \mathbf{2}$ の間の変換を定義できる．これは「下部」を「上部」に写すものであり，明らかに自然である．我々は μ を C からの**普遍自然変換** (universal natural transformation) と呼ぶが，それは以下の理由による．すなわち，$S, T : C \to B$ の間の任意の自然変換 $\tau : S \dot{\to} T$ が与えられたとき，任意の対象 c について $F\mu c = \tau c$ となる一意的な函手 $F : C \times \mathbf{2} \to B$ が存在する．特に F は，$f : c \to c'$ のとき

$$F\langle f, 0\rangle = Sf, \quad F\langle f, 1\rangle = Tf, \quad F\langle f, \downarrow\rangle = Tf \circ \tau c = \tau c' \circ Sf \tag{6}$$

となる．これらの割り当てが双函手 $F : C \times \mathbf{2} \to B$ を定義し $F\mu = \tau$ となることは直ちに証明できる．

演習問題

1. 圏の積が以下の既知の特別な場合を含むことを示せ：モノイド（対象が一つの圏）の積，群の積，集合（離散圏）の積．
2. 前順序の積は前順序であることを示せ．
3. $\{C_i \mid i \in I\}$ が集合 I による添字のついた圏の族であるとき，積 $C = \prod_i C_i$ とその射影 $P_i : C \to C_i$ を記述し，これらの射影の普遍性[2]を立証せよ．
4. 第 I 章第 2 節の圏 $\mathbf{Matr}_K$ の逆を記述せよ．
5. 位相空間とその上の実数値連続関数のなす環という対応は，**Top** から **Rng** へのある反変函手の対象関数になっていることを示せ．

4　函手圏

圏 C と B が与えられたとき，すべての函手 $R, S, T, \ldots : C \to B$ を考える．$\sigma : R \dot{\to} S$ と $\tau : S \dot{\to} T$ が二つの自然変換であれば，各 $c \in C$ に対するそれらのコンポーネントから合成射 $(\tau \cdot \sigma)c = \tau c \circ \sigma c$ が定義される．それ

[2] ［訳注］二つの積の場合の普遍性 (2) を適当に拡張せよ．

らは自然変換 $\tau\cdot\sigma : R \dot{\to} T$ のコンポーネントとなる．$\tau\cdot\sigma$ が自然であることを示すには，C の任意の $f : c \to c'$ を取って図式

$$\begin{array}{ccccc} & Rc & \xrightarrow{Rf} & Rc' & \\ & {\scriptstyle \sigma c}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma c'} & \\ (\tau\cdot\sigma)c & Sc & \xrightarrow{Sf} & Sc' & (\tau\cdot\sigma)c' \\ & {\scriptstyle \tau c}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau c'} & \\ & Tc & \xrightarrow{Tf} & Tc' & \end{array}$$

を考える．σ と τ は自然であるので小さな矩形は可換である．ゆえに長方形全体が可換であり，合成 $\tau\cdot\sigma$ は自然である．

この自然変換の合成は結合的である．さらに，各函手 T について恒等変換があって，それはコンポーネントが $1_T\,c = 1_{Tc}$ の自然変換 $1_T : T \to T$ である．ゆえに圏 B と C が与えられたとき，対象が函手 $T : C \to B$ で射が二つのそのような函手の間の自然変換である**函手圏** (functor category) $B^C = \mathrm{Funct}(C, B)$ を形式的に構築することができる．この圏の「hom 集合」はしばしば示唆的に

$$\mathrm{Nat}(S,T) = B^C(S,T) = \{\tau \mid \tau : S \dot{\to} T \text{ は自然 }\} \qquad (1)$$

と書かれる．これは必ずしも小さな集合ではない．

函手圏は幅広く用いられる．たとえばもし B と C が集合（すべての射が恒等射である圏）ならば B^C も集合である．すなわち，すべての関数 $C \to B$ からなるおなじみの「関数-集合」である．特に二点集合 $B = \{0,1\}$ については，$\{0,1\}^C$ は C のすべての部分集合の集合（と同型）になる（「冪集合」$\mathcal{P}C$）．任意の圏 B について，$B^{\mathbf{1}}$ は B に同型であり，$B^{\mathbf{2}}$ は B の**射の圏** (category of arrows) と呼ばれる．その対象は B の射 $f : a \to b$ であり，射 $f \to f'$ は B の射の対 $\langle h, k\rangle$ で可換図式

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{h} & a' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ b & \xrightarrow{k} & b' \end{array} \qquad (2)$$

を可換にするものである．M がモノイド（対象が一つの圏）であれば，$\mathbf{Set}^M$

は（ある集合への）M の作用を対象としこのような作用のモルフィズムを射とする圏である．函手圏 $\mathbf{Grp}^M$ の対象は作用域 M を持つ群である．

K が可換環であり G が群ならば，函手圏 $(K\text{-}\mathbf{Mod})^G$ は G の（K-線型）表現からなる圏である．特に各函手 $T : G \to K\text{-}\mathbf{Mod}$ は，K-加群 V（圏 G の唯一の対象の像）と群のモルフィズム $T : G \to \mathrm{Aut}(V)$（線型変換 $V \to V$ による G の表現）によって決定される．T' が二つ目のこういった表現であれば自然変換 $\sigma : T \dot{\to} T'$ は，すべての $g \in G$ について図式

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\ \sigma\ } & V' \\ {\scriptstyle Tg}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle T'g} \\ V & \xrightarrow{\ \sigma\ } & V' \end{array} \tag{3}$$

を可換にする単一の射 $\sigma : V \to V'$（G の唯一の対象におけるコンポーネント）によって決定される．表現論ではこのような σ は繫絡 (intertwining) 演算子と呼ばれる．したがって $(K\text{-}\mathbf{Mod})^G$ は G の表現を対象とし繫絡演算子をモルフィズムとする圏である．

圏 C が大きいときには函手圏 B^C はユニバースの部分集合とは限らない．たとえば $B = \{0, 1\}$ をちょうど二つの要素を持つ集合とし C を［ユニバースである］集合 U とすると，函手 $U \to B$ はちょうど U から二つの要素を持つ集合への関数になる．可能なこのような関数は（特性関数として）U の可能な部分集合に対応する．それゆえ $\{0, 1\}^U$ の対象の集合は U のすべての部分群の集合 $\mathcal{P}(U)$ と同値であり，この集合は U よりも大きな基数を持つ．

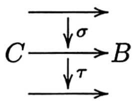
演習問題

1. 環 R について R-$\mathbf{Mod}$ を函手圏 $\mathbf{Ab}^R$ の充満部分圏として記述せよ．
2. 有限集合（有限離散圏）X について B^X を記述せよ．
3. $\mathbf{N}$ を自然数からなる離散圏とする．函手圏 $\mathbf{Ab}^{\mathbf{N}}$ を記述せよ（次数付きアーベル群からなる圏としてよく知られている）．
4. P と Q が前順序であるとき，函手圏 Q^P を記述し，それが前順序であることを示せ．
5. $\mathbf{Fin}$ がすべての有限集合からなる圏であり G が有限群であるとき，$\mathbf{Fin}^G$（G のすべての置換表現からなる圏）を記述せよ．

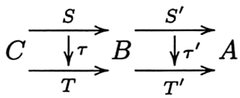
6. $\mathbf{M}$ を無限巡回モノイド（要素 $1, m, m^2, \ldots$）とする．函手圏 $(\mathbf{Matr}_K)^{\mathbf{2}}$ あるいは $(\mathbf{Matr}_K)^{\mathbf{M}}$ において，対象は行列であり，同型な対象（行列）は線型代数の通常の意味でちょうどそれぞれ同値な行列あるいは相似な行列になることを示せ．**Matr** については，第 I 章第 2 節を見られたい．
7. 圏 B, C と函手圏 $B^{\mathbf{2}}$ が与えられたとき，各函手 $H : C \to B^{\mathbf{2}}$ が二つの函手 $S, T : C \to B$ と自然変換 $\tau : S \dot{\to} T$ を決定することを示し，この割り当て $H \mapsto \langle S, T, \tau \rangle$ が全単射であることを示せ．
8. 演習問題 7 の函手 H を第 3 節の (6) の函手 F と関係付けよ．

5 すべての圏からなる圏

我々は二つの自然変換



の「垂直」合成 $\tau \cdot \sigma$ を定義した．自然変換にはもう一つ「水平」合成が存在する．函手と自然変換



(1)

が与えられたとき，最初に合成函手 $S' \circ S$ と $T' \circ T : C \to A$ を作り，次に矩形

$$\begin{array}{ccc} S'Sc & \xrightarrow{\tau' Sc} & T'Sc \\ {\scriptstyle S'\tau c}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T'\tau c} \\ S'Tc & \xrightarrow{\tau' Tc} & T'Tc \end{array}$$

を構築することができるが，B の射 τc についての τ' の自然性よりこれは可換である．ここで $(\tau' \circ \tau)c$ をこの矩形の対角の射

$$(\tau' \circ \tau)c = T'\tau c \circ \tau' Sc = \tau' Tc \circ S'\tau c \tag{2}$$

と定義する．$\tau' \circ \tau : S'S \dot{\to} T'T$ が自然であることを示すために，C の任意の射 f について図式

$$\begin{array}{ccccccc} S'Sc & \xrightarrow{S'\tau c} & S'Tc & \xrightarrow{\tau' Tc} & T'Tc & \quad & c \\ \downarrow{\scriptstyle S'Sf} & & \downarrow{\scriptstyle S'Tf} & & \downarrow{\scriptstyle T'Tf} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S'Sb & \xrightarrow[S'\tau b]{} & S'Tb & \xrightarrow[\tau' Tb]{} & T'Tb & & b \end{array}$$

を作る．水平方向については，合成は定義より $(\tau' \circ \tau)c$ と $(\tau' \circ \tau)b$ である．左側の矩形は，τ が自然であり S' が函手であることにより可換である．右側の矩形は，τ' が自然であり $Tf : Tc \to Tb$ が射であることにより可換である．[以上より示される] 図式の外側の可換性は $\tau' \circ \tau$ が自然であることを述べている．

この合成 $\langle \tau', \tau \rangle \to \tau' \circ \tau$ が結合的であることは直ちに示される．さらに恒等射も存在する．もし $I_B : B \to B$ が圏 B についての恒等函手であり $1_B : I_B \xrightarrow{\cdot} I_B$ がその函手から自分自身への恒等自然変換ならば，$1_B \circ \tau = \tau$ と $\tau' \circ 1_B = \tau'$ を得る．したがって 1_B は合成 $\circ$ について恒等射である．同様に合成 $\cdot$ についても恒等射である．ここで函手の記号 S が恒等自然変換 $S \xrightarrow{\cdot} S$ も表すことにすると便利である．上の状況でこの表記を用いれば合成自然変換

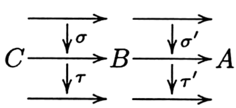
$$S' \circ \tau : S' \circ S \xrightarrow{\cdot} S' \circ T, \qquad \tau' \circ T : S' \circ T \xrightarrow{\cdot} T' \circ T$$

を得る．すると定義 (2) は垂直合成も用いて

$$\tau' \circ \tau = (T' \circ \tau) \cdot (\tau' \circ S) = (\tau' \circ T) \cdot (S' \circ \tau) \tag{3}$$

のように書き直すことができる．

より一般的な規則がある．三つの圏と四つの自然変換



(4)

が与えられたとき，$\cdot$ の「垂直」合成と $\circ$ の「水平」合成は恒等式

$$(\tau' \cdot \sigma') \circ (\tau \cdot \sigma) = (\tau' \circ \tau) \cdot (\sigma' \circ \sigma) \tag{5}$$

によって関係付けられる（**相互交換法則** (interchange law)）．読者はこの事実を証明するのに必要となる証明の図式を書き下すと楽しいだろう．

これらの結果は以下のようにまとめることができる（ここでは小さな圏だけを考えている）.

定理 1 すべての自然変換の集まりは二つの異なる圏の間の射の集合であって，二つの異なる合成演算 $\cdot$ と $\circ$ に従い，これらは相互交換法則 (5) を満足する．さらに，合成 $\circ$ についての恒等射である射（自然変換）はどれも合成 $\cdot$ についての恒等射でもある.

水平合成 $\circ$ による圏の構造における対象は圏であり，垂直合成による圏の構造における対象は函手であることに注意されたい．これらの合成を用いる際には,「水平」合成の記号 $\circ$ は（圏における射の合成を書くときに普通そうされるように）しばしば省略されるが,「垂直」合成を示す黒点はそのままである．C の対象と射は函手 $c:\mathbf{1}\to C$ や $f:\mathbf{2}\to C$ と書くこともできることに気付いて欲しい．このとき $\sigma\circ c=\sigma c$ のような記号は

$$\mathbf{1} \xrightarrow{\;c\;} C \;\underset{\longrightarrow}{\overset{\longrightarrow}{\Downarrow\sigma}}\; B$$

のような状況において理解できる意味を持つ.

二重圏 (double category) (Ehresmann [1965]) とは,（すべての自然変換の集合のように）(5) を満たす二つの異なる合成についての射の集合になっているような集合を意味する.（二次元圏を縮めて）**2-圏** (2-category) とは第一の合成についてのすべての恒等射が第二の合成についても恒等射であるような二重圏である．たとえば **Set** におけるすべての可換図式からなる圏は（明らかな水平合成と垂直合成に関して）二重圏であるが，2-圏ではない．より高次の n についての n-圏も存在する．第 XII 章を見られたい.

二つの（部分的に定義された）二項演算 $\cdot$ と $\circ$ は，両辺の合成が定義されているときにいつでも (5) を満たすとき，**相互交換法則**を満たすと言う．ここで他の例をいくつか挙げておく．もし C が圏で $\cdot : C\times C\to C$ が函手（たとえばテンソル積）であり，$\sigma,\sigma',\tau,\tau'$ が C の射で合成 $\sigma'\circ\sigma$ と $\tau'\circ\tau$ が定義されているならば，相互交換法則 (5) が成り立つ．実際，これは函手 $\cdot$ が合成 $\circ$ を保存するという要求そのものである．また，もし $\sigma,\sigma',\tau,\tau'$ が正方行列で通常の行列の積 $\sigma'\circ\sigma$ と $\tau'\circ\tau$ が定義されており，$\tau\cdot\sigma$ は τ と σ のブロックが対角に並んで他は 0 であるような行列

$$\begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

ならば，(5) が成り立つ．

函手圏 B^C はそれ自身が圏 B と C の函手であり，B について共変で C について反変である．特に，すべての小さな圏からなる圏 **Cat** だけを考えると，これは函手 $\mathbf{Cat}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Cat} \to \mathbf{Cat}$ である．対象関数は圏の対 $\langle C, B\rangle$ を函手圏 B^C に写し，射関数は函手の対 $F : B \to B'$ と $G : C' \to C$ を函手

$$F^G : B^C \to {B'}^{C'}$$

に写す．これは対象 $S \in B^C$ について $F^G S = F \circ S \circ G$ と定義され，B^C の射 $\tau : S \dot{\to} T$ について $F^G \tau = F \circ \tau \circ G$ と定義される．たとえば，F^C は「左から F を合成する」ということであり，B^G は「右から G を合成する」ということであることに注意されたい．この函手はちょうど hom 函手 $\mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ の類似物である．

演習問題

1. 小さな圏 A, B, C について全単射

$$\mathbf{Cat}(A \times B, C) \cong \mathbf{Cat}(A, C^B)$$

を証明し，A, B, C において自然であることを示せ．これより $-\times B : \mathbf{Cat} \to \mathbf{Cat}$ が右随伴を持つことを示せ（第 IX 章を見られたい）．

2. 圏 A, B, C について自然同型

$$(A \times B)^C \cong A^C \times B^C, \qquad C^{A \times B} \cong (C^B)^A$$

を証明せよ．二番目の同型を演習問題 1 の全単射と比較せよ．

3. 定理 1 を用いて水平合成が函手

$$\circ : A^B \times B^C \to A^C$$

であることを示せ．

4. G を単位元 e を持つ位相群とし，$\sigma, \sigma', \tau, \tau'$ を e から始まって e で終わる G の連続な経路とする（I を単位区間とすると $\sigma : I \to G$ は連続であり，$\sigma(0) = e = \sigma(1)$ である）．$\tau \circ \sigma$ を，第 I 章第 5 節 (1) のように σ に τ が続く経路とする．$\tau \cdot \sigma$ を，$0 \leqq t \leqq 1$ について $(\tau \cdot \sigma)t = (\tau t)(\sigma t)$ となるような τ と σ の各点における積とする．このとき相互交換法則 (5) が成り立つことを証明せよ．

5. (Hilton-Eckmann). S を二つの（至るところで定義された）二項演算 $\cdot : S\times S \to S$, $\circ : S \times S \to S$ を持つ集合とし，両方とも同じ（両側）単位元 e を持ち相互交換恒等式 (5) を満たすものとする．このとき $\cdot$ と $\circ$ は等しく，それぞれ可換であることを証明せよ．
6. 演習問題 4 と 5 を組み合わせて位相群の基本群がアーベル群であることを証明せよ．
7. $T : A \to D$ が函手であるとき，その射関数 $T_{a,b} : A(a,b) \to D(Ta, Tb)$ は函手 $A^{\mathrm{op}} \times A \to \mathbf{Set}$ の間の自然変換を定義することを示せ．
8. 任意の圏の恒等函手 I_C について，自然変換 $\alpha : I_C \stackrel{\cdot}{\to} I_C$ は可換モノイドをなす．$C = \mathbf{Grp}$, $\mathbf{Ab}$, $\mathbf{Set}$ の場合のこのモノイドを見つけよ．

6　コンマ圏

以下に示すいくつかの特別な場合のように，対象が何らかの射であるような圏の一般的な構築がもう一つある．

b が圏 C の対象であるとき，b **の下方の対象** (object under b) からなる圏とは，圏 $(b \downarrow C)$ で，その対象は C の対象 c と C の射 $f : b \to c$ からなるすべての対 $\langle f, c\rangle$ であり，射 $h : \langle f, c\rangle \to \langle f', c'\rangle$ は C の射 $h : c \to c'$ で $h \circ f = f'$ を満たすものである．したがって $(b \downarrow C)$ の対象は単に C における b からの射であり，$(b \downarrow C)$ の射は上方の頂点が b である可換な三角図式である．図示すると次のようになる．

$$\text{対象 } \langle f, c\rangle : \begin{array}{c} b \\ \downarrow{\scriptstyle f} \\ c \end{array} ; \qquad \text{射 } \langle f, c\rangle \xrightarrow{h} \langle f', c'\rangle : \begin{array}{ccc} & b & \\ {\scriptstyle f}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle f'} \\ c & \xrightarrow[h]{} & c' \end{array} . \tag{1}$$

このとき $(b \downarrow C)$ の射の合成は，これらの三角図式の底辺の射 h の C における合成により与えられる．

たとえば，$*$ が任意の一点集合を表し X が任意の集合であるとすると，各関数 $* \to X$ はちょうど集合 X の点の選択となる．よって $(* \downarrow \mathbf{Set})$ はちょうど基点付き集合からなる圏となる（第 I 章第 7 節）．同様に $(\mathbf{Z} \downarrow \mathbf{Ab})$ はある元が選択されたアーベル群からなる圏である．

a が C の対象であるとき，a **の上方の対象** (object over a) からなる圏

$(C \downarrow a)$ は

$$\text{対象}: \begin{array}{c} c \\ \downarrow f \\ a \end{array}; \qquad \text{射}: \begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{h} & c' \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle f'} & \\ & a & \end{array} \tag{2}$$

を持ち，この三角図式は可換である．たとえば，$*$ は **Set** における終対象であるのでいつでも一意的な $X \to *$ が存在する．それゆえ $(\mathbf{Set} \downarrow *)$ は **Set** に同型である．また一方，$\mathbf{Z}$ は環であり，圏 $(\mathbf{Rng} \downarrow \mathbf{Z})$ は，モルフィズム $\varepsilon : R \to \mathbf{Z}$ が付随した環（「添加 (augmentation)」ε を伴う環 R と呼ばれる）を対象とし，添加を保存する環のモルフィズムをモルフィズムとするような圏である．

b が C の対象であり $S : D \to C$ が函手であるとき，b の **S-下方の対象** (object S-under b) からなる圏 $(b \downarrow S)$ は，$d \in \mathrm{Obj}D$ と $f : b \to Sd$ からなるすべての対 $\langle f, d\rangle$ を対象とし，$f' = Sh \circ f$ を満たす D のすべての射 $h : d \to d'$ を射 $h : \langle f, d\rangle \to \langle f', d'\rangle$ とする．図では，

$$\text{対象}: \begin{array}{c} b \\ \downarrow f \\ Sd \end{array}; \qquad \text{射 } h: \begin{array}{ccc} & b & \\ & {\scriptstyle f}\swarrow \quad \searrow{\scriptstyle f'} & \\ Sd & \xrightarrow[Sh]{} & Sd' \end{array} \text{（可換）} \tag{3}$$

となる．合成は再び D の射 h の合成により与えられる．$(b \downarrow S)$ において射が等しいとは D の射として等しいことを意味することに特に注意されたい．

たとえば，$U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ を忘却函手とする．このとき各集合 x について $(x \downarrow U)$ の対象は x からある群 g の基底集合への関数 $x \to Ug$ である．たとえば，x をその集合 x の要素により生成された自由群の基底集合に写す関数はそのような対象の一つである．この圏 $(x \downarrow U)$ —— および他のこれに類似したもの —— は随伴函手を取り扱うときに広く用いられる．

また，$a \in C$ であり $T : E \to C$ が函手であるとき，a の T-上方の対象 (object T-over a) からなる圏 $(T \downarrow a)$ を構築できる．

一般的な構築をここに示す．圏と函手

$$E \xrightarrow{T} C \xleftarrow{S} D$$

が与えられたとき，**コンマ圏** (comma category) $(T \downarrow S)$ もしくは (T, S) は，$d \in \mathrm{Obj}D$, $e \in \mathrm{Obj}E$, $f : Te \to Sd$ であるすべての三つ組 $\langle e, d, f\rangle$ を対象とし，射 $\langle e, d, f\rangle \to \langle e', d', f'\rangle$ は $f' \circ Tk = Sh \circ f$ を満たす射 $k : e \to e'$, $h : d \to d'$ からなるすべての対 $\langle k, h\rangle$ である．図で示すと

$$\text{対象 } \langle e, d, f\rangle : \quad \begin{array}{c} Te \\ \downarrow{\scriptstyle f} \\ Sd \end{array} ; \qquad \text{射 } \langle k, h\rangle : \quad \begin{array}{ccc} Te & \xrightarrow{Tk} & Te' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ Sd & \xrightarrow[]{Sh} & Sd' \end{array} \tag{4}$$

であり，四角の図式は可換である．合成 $\langle k', h'\rangle \circ \langle k, h\rangle$ は，定義されていれば $\langle k' \circ k, h' \circ h\rangle$ である．

コンマ圏 $(T \downarrow S)$ のこの一般的な記述は前述したすべての場合を含む．実際，C の対象 b は函手 $b : \mathbf{1} \to C$ と見なすことができる．この意味で $T = b$ と取ると，コンマ圏 $(T \downarrow S)$ は b の S-下方の対象からなる圏 $(b \downarrow S)$ となる．$S = C$ が C の恒等函手のとき，これは特に b の下方の C の対象からなる圏 $(b \downarrow C)$ となる．同様に S を函手 $\mathbf{1} \to C$，すなわち C のある対象 a と見なすこともできる．再び $S = T = C$ の恒等函手としてみよう．このとき $(C \downarrow C)$ はちょうど C のすべての射からなる圏 $C^{\mathbf{2}}$ である．または S と T を C の対象 a と b としてみよう．このとき $(T \downarrow S) = (b \downarrow a)$ はすべての射 $f : b \to a$ を対象とし，各対象の恒等射のみをモルフィズムとする．言い換えれば，$(b \downarrow a)$ は集合（離散圏）$\hom_C(b, a)$ である．この場合が「コンマ圏」という名前と (T, S) という表記 —— コンマは既に使われ過ぎているのでここでは避けた表記 —— が選ばれた理由である．

コンマ圏 $(T \downarrow S)$ の構築は圏と函手からなる次の可換図式によって視覚化できる．

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & (T \downarrow S) & & & & \\ & & & {\scriptstyle P}\swarrow & \downarrow{\scriptstyle R} & \searrow{\scriptstyle Q} & & & \\ E & \xrightarrow[T]{} & C & \xleftarrow[C^{d_0}]{} & C^2 & \xrightarrow[C^{d_1}]{} & C & \xleftarrow[S]{} & D \end{array} \tag{5}$$

ここで d_0, d_1 は二つの函手 $\mathbf{1} \to \mathbf{2}$ であり，函手圏 $C^{\mathbf{2}}$ はちょうど C の射からなる圏であり，そのため（前節の終わりで定義された）函手 C^{d_0}, C^{d_1} は単に C の各射 f を各々そのドメインとコドメインに写す函手となる．函手 P

と Q（コンマ圏の**射影** (projection) と呼ばれる）と函手 R は（対象の上では）図式

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \langle e, d, f : Te \to Sd \rangle & & & & \\ & \swarrow & & & \downarrow & & & \searrow & \\ e & \longmapsto & Te & \longleftarrow\!\! | & (f : Te \to Sd) & \longmapsto & Sd & \longleftarrow\!\! | & d \end{array} \tag{6}$$

が示唆するように定義される．

演習問題

1. K が可換環であるとき，コンマ圏 $(K \downarrow \mathbf{CRng})$ がすべての小さな可換 K-代数からなる（通常の）圏であることを示せ．
2. t が圏 C の終対象であるとき，$(C \downarrow t)$ が C と同型であることを証明せよ．
3. 射の上で P, Q, R を定義することにより (6) を完成させよ．
4. (S. A. Huq)．函手 $T, S : D \to C$ が与えられたとき，自然変換 $\tau : T \stackrel{\cdot}{\to} S$ は，(5) の射影 P と Q について $P\tau = Q\tau = \mathrm{id}_D$ となるような函手 $\tau : D \to (T \downarrow S)$ と同じものであることを示せ．
5. 圏と函手からなる任意の可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & X & & & & \\ & \swarrow{\scriptstyle P'} & & & \downarrow{\scriptstyle R'} & & & {\scriptstyle Q'}\searrow & \\ E & \longrightarrow & C & \longleftarrow & C^2 & \longrightarrow & C & \longleftarrow & D \end{array}$$

（底辺の並びは (5) と同じ）が与えられたとき，$P' = PL$, $Q' = QL$, $R' = RL$ となる一意的な函手 $L : X \to (T \downarrow S)$ が存在することを証明せよ．(このことは $(T \downarrow S)$ が「引き戻し (pullback)」であることを述べている．第 III 章第 4 節を参照.）
6. (a) 小さな C, D, E を固定したとき，$\langle T, S \rangle \mapsto (T \downarrow S)$ は函手 $(C^E)^{\mathrm{op}} \times (C^D) \to \mathbf{Cat}$ の対象関数であることを示せ．
(b) C, D, E を可変にしたときに同様な函手を記述せよ．

7　グラフと自由圏

まず最初に集合 X から生成される自由モノイド FX の構築を思い出してみよう．それは集合 X の要素 x_i のすべての有限列 $x_1 x_2 \cdots x_n$ からなる．こ

れらの列の乗法は並置 (juxtaposition) により与えられるので，空列が FX の単位元になる．この自由モノイドを特徴付ける性質は以下のように述べることができる．すなわち，任意のモノイド M について UM が M の要素の集合を示すものとする．このとき，任意の関数 $f : X \to UM$ はある一意的なモノイドのモルフィズムに拡張される．

$$f : X \to UM \quad \text{は} \quad g : FX \to M \quad \text{に拡張される．}$$

これに対応する自由圏の記述を得るために，最初の集合 X を有向グラフ G で置き換える．

（有向）グラフ G（第I章第2節）は対象（頂点）の集合 O と射 f（辺）の集合 A と関数の対 $A \rightrightarrows O$ であることを思い出そう．

$$A \underset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\rightrightarrows}} O, \qquad \partial_0 f = f \text{ のドメイン}, \qquad \partial_1 f = f \text{ のコドメイン}.$$

グラフのモルフィズム $D : G \to G'$ は，関数の対 $D_O : O \to O'$ と $D_A : A \to A'$ で任意の射 $f \in A$ について

$$D_O \partial_0 f = \partial_0 D_A f \quad \text{かつ} \quad D_O \partial_1 f = \partial_1 D_A f$$

を満たすものである．これらのモルフィズムは明らかな合成により，すべての小さなグラフからなる圏 **Grph** の射となる（グラフが小さいとは O と A の両方が小さい集合であることを言う）．各グラフは，合成射も恒等射もないことを除けば圏の図式とちょうど同じように頂点（対象）と射からなる図式により図示することができる．ゆえにグラフはしばしば**図式スキーム** (diagram scheme) や**前圏** (precategory) と呼ばれる[3]．

すべての圏 C は，どの射が合成射でありどの射が恒等射かを忘れることにより同じ対象と射を持つグラフ UC を決定する．すべての函手 $F : C \to C'$ は対応するグラフの間のモルフィズム $UF : UC \to UC'$ でもある．これらの所見から，小さな圏から小さなグラフへの忘却函手 $U : \mathbf{Cat} \to \mathbf{Grph}$ が定義される．

O をある固定した集合とする．*O*-**グラフ** (*O*-graph) とは，O を対象の集

[3] ［訳注］最近ではこれらの用語はほとんど使われない．

合とするグラフである．O-グラフのモルフィズム D は $D_O : O \to O$ が恒等関数であるようなモルフィズムである．最も単純な O-グラフはドメインとコドメインの関数が両方とも恒等関数であるグラフ $O \rightrightarrows O$ である．A と B が二つの O-グラフ（の射の集合）ならば，O 上の積は

$$A \times_O B = \{\langle g,\, f\rangle \mid \partial_0 g = \partial_1 f,\, g \in A,\, f \in B\} \tag{1}$$

であり，これは射の「合成可能対」$\cdot \xrightarrow{f} \cdot \xrightarrow{g} \cdot$ からなる集合である．

$$\partial_0\langle g,\, f\rangle = \partial_0 f, \quad \partial_1\langle g,\, f\rangle = \partial_1 g \tag{2}$$

と定義することによりこの集合は O-グラフになる．O-グラフ上のこの積演算は結合的である．なぜなら任意の三つの O-グラフ A, B, C について明らかな同型 $A \times_O (B \times_O C) \cong (A \times_O B) \times_O C$ が存在するからである．特別な O-グラフである O については $f \mapsto \langle f,\, \partial_0 f\rangle$ で与えられる同型 $A \cong A \times_O O$ も存在する．同様に $A \cong O \times_O A$ も存在する．

O を対象とする圏は O-グラフ A と O-グラフの二つのモルフィズム c : $A \times_O A \to A$ と $i : O \to A$（合成と恒等射）で図式

$$\begin{array}{ccc}
(A \times_O A) \times_O A \cong A \times_O (A \times_O A) & \xrightarrow{1 \times c} & A \times_O A \\
\downarrow{\scriptstyle c \times 1} & & \downarrow{\scriptstyle c} \\
A \times_O A & \xrightarrow{\qquad c \qquad} & A
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
O \times_O A & \xrightarrow{i \times 1} & A \times_O A & \xleftarrow{1 \times i} & A \times_O O \\
\downarrow{\scriptstyle \cong} & & \downarrow{\scriptstyle c} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} \\
A & = & A & = & A
\end{array} \tag{3}$$

を可換にするものとして記述することができる．ここで $1 \times c$ は $1 \times_O c$ の省略であり他も同様である．実際，合成可能な射 $\langle g,\, f\rangle$ は $c(g,\, f)$ で与えられる合成 c を持ち，各対象 $b \in O$ は $i(b)$ で与えられる恒等射を持っている．一番目の図式は合成が結合的であることを述べており，二番目の図式は各 $i(a)$ が合成の左および右恒等射として働くことを述べている．この意味で圏は序章で述べたようにモノイドに似ている．ただし，そこでの **Set** は O-**Grph** に置き換えられ，集合の積は $\times_O$ に置き換えられる．

任意の O-グラフ G は，同じ対象の集合を持つ圏 C を常に「生成する」ことができる．この圏の射は G の合成可能な射の「列」となり，b から a への C の射は G の連続する辺からなる b から a への経路として図示することができる．この圏は $C = C(G)$ と書かれ，グラフ G で生成される**自由圏** (free category) と呼ばれる．その基本的性質は以下のように述べることができる．

定理 1 $G = \{A \rightrightarrows O\}$ を小さなグラフとする．O を対象の集合とする小さな圏 $C = C_G$ および G から C の基底グラフ UC へのグラフモルフィズム $P : G \to UC$ で，次の性質を満たすものが存在する．任意の圏 B と任意のグラフモルフィズム $D : G \to UB$ が与えられたとき，可換図式

$$
\begin{array}{ccccc}
C & & G & \xrightarrow{P} & UC \\
{\scriptstyle D'}\downarrow & & & \searrow{\scriptstyle D} & \downarrow{\scriptstyle UD'} \\
B & & & & UB
\end{array}
\qquad (4)
$$

におけるように $(UD') \circ P = D$ となる一意的な函手 $D' : C \to B$ が存在する．特に B が O を対象の集合とし D が O-グラフのモルフィズムであるならば，D' は対象については恒等関数である．

(4) で述べられている P の性質は，射 $P : G \to UC$ がコンマ圏 $(G \downarrow U)$ における始対象であると述べているのと同値である．ゆえに P は（C での）同型を除いて一意的である．同様な性質はしばしば現れる．これを P は G から基底グラフ函手 U へのモルフィズムの中で「普遍的」であると言うことにする．

証明 C の対象を G の対象とし，C の射は G の n 個の対象 $a_1, \ldots, a_n$ を G の $n-1$ 本の射 $f_i : a_i \to a_{i+1}$ により結び付けて合成した有限列（あるいは「経路」）

$$a_1 \xrightarrow{f_1} a_2 \xrightarrow{f_2} a_3 \to \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} a_n$$

とする．このような各列を C の射 $\langle a_1, f_1, \ldots, f_{n-1}, a_n \rangle : a_1 \to a_n$ と見なし，二つの列の合成を並置により（すなわち接合 (concatenation) により）共通する端を同一視することで定義する．この合成は明らかに結合的であり，

長さ $n=1$ の列 $\langle a_1\rangle$ はその恒等射である．長さ $n>1$ のすべての列は長さ 2 の列の合成である．

$$\langle a_1, f_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, f_{n-1}, a_n\rangle = \langle a_{n-1}, f_{n-1}, a_n\rangle \circ \cdots \circ \langle a_1, f_1, a_2\rangle. \quad (5)$$

我々の望んでいるグラフモルフィズム $P : G \to UC$ は，与えられたグラフ G の各射 $f : a_1 \to a_2$ を長さ 2 の列 $\langle a_1, f, a_2\rangle$ へ写す．

さて，与えられたグラフ G からある圏 B の基底グラフへの他の任意のモルフィズム $D : G \to UB$ を考えてみよう．もし可換図式 (4) にあるように $UD' \circ P = D$ となる函手 $D' : C \to B$ が存在するなら，D' は対象について $D'a = Da$ であり射について $D'\langle a_1, f_1, a_2\rangle = Df_1$ でなければならない．長さ $n>1$ の任意の列は C における合成 (5) であるから，D' は

$$D'\langle a_1, f_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, f_{n-1}, a_n\rangle = Df_{n-1} \circ \cdots \circ Df_1$$

によって与えられていなければならない．逆にこの式があれば，図式 (4) を可換にするような函手 $D' : C \to B$ が定義される．　□

ここで簡単な例をいくつか示そう．$\partial_0 f = \partial_1 f$ である単一の射 f からなるグラフについては，その自由圏は射 1, f, f^2, ... すべてからなる．異なる端を持つ単一の射 g からなるグラフについては，その自由圏はこの射と二つの恒等射（各端に一つ）からなる．三つの頂点を持つグラフ $\cdot \to \cdot \to \cdot$ については，その自由圏は可換な三角図式である（一つの合成と三つの恒等射を加える）．

O が一点からなるとき，グラフ G は単に集合 X（射の集合 $X=A$）に還元されて，上の定理は集合 X により生成される自由モノイド M のよく知られている構築を与える．

系 2 任意の集合 X に対して，UM は M の基底集合であるとき，以下の普遍性を満たすモノイド M と関数 $p : X \to UM$ が存在する：任意のモノイド L と任意の関数 $h : X \to UL$ について，$h = Uh' \circ p$ となる一意的なモノイドモルフィズム $h' : M \to L$ が存在する．

M の要素は恒等射および $x_i \in X$ の列 $\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle$ である．

グラフは図式を記述するのに使うことができる．G が任意のグラフであるとき，圏 B における形状 G の**図式** (diagram) はグラフモルフィズム $D : G \to UB$ として定義することができる．定理により，これらのモルフィズム D は全単射 $D' \mapsto D = UD' \circ P$ を通じてちょうど函手 $D' : C_G \to B$ に対応する．この全単射

$$\mathbf{Cat}(C_G, B) \cong \mathbf{Grph}(G, UB) \tag{6}$$

は G と B において自然であるので，$C : \mathbf{Grph} \to \mathbf{Cat}$ が忘却函手 $U : \mathbf{Cat} \to \mathbf{Grph}$ の左随伴（第 IV 章を見られたい）であることを主張している．

演習問題

1. 「逆グラフ」と「二つのグラフの積」を，圏についての対応する定義と一致するように（すなわち函手 U が逆と積を保存するように）定義せよ．
2. すべての有限順序数がそれぞれ自由圏であることを示せ．
3. 各グラフ G が自由亜群（すなわち「圏 C」を「亜群 F」に,「圏 B」を「亜群 E」に置き換えた定理 1 を満たすもの）を生成することを示せ．すべての集合 X が自由群を生成することを系として導け．

8　商圏

ある圏は以下のように生成元と関係によって記述できる．

命題 1 与えられた圏 C について R を，C の対象の各対 a, b に hom 集合 $C(a, b)$ 上の二項関係 $R_{a,b}$ を割り当てるような関数とする．このとき，ある圏 C/R と函手 $Q = Q_R : C \to C/R$ が存在して次の二つの条件を満たす．すなわち (i) C で $fR_{a,b}f'$ ならば $Qf = Qf'$ であり，(ii) $H : C \to D$ が，すべての f と f' について $fR_{a,b}f'$ ならば $Hf = Hf'$ であるような C からの任意の函手であるならば，$H' \circ Q_R = H$ となるような一意的な函手 $H' : C/R \to D$ が存在する．さらに函手 Q_R は対象について全単射である．

まとめると，Q は fRf' であれば $Qf = Qf'$ となるもので普遍的な C 上の函手である．

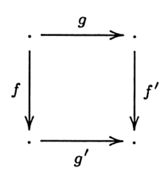
たとえば，$C = \mathbf{Top}$ であり fRf' は f が f' とホモトピックであることを意味するものとすると，望んでいる商圏 C/R は第 I 章第 7 節の位相空間を対象とし連続写像のホモトピー類を射とする圏 **Toph** に他ならない．この直接的な構築が **Toph** について可能であるのは，写像の間のホモトピー関係が合成によって保存される同値関係だからである．一般の場合ではこれらの性質を満たすために，関係 R について予備的な構築が必要である．

証明の概略　(i) 対象の各対 a, b について $R_{a,b}$ が $C(a, b)$ 上の反射的，対称的，推移的関係であり (ii) $f, f' : a \to b$ が $fR_{a,b}f'$ ならばすべての $g : a' \to a$ とすべての $h : b \to b'$ について $(hfg)R_{a',b'}(hf'g)$ となるとき，R を C 上の**合同** (congruence) 関係と呼ぶ．任意の R が与えられると，$R \subset R'$ となる最小の C 上の合同関係 R' が存在する（証明は演習問題）．いま，C/R の対象を C の対象であるとし，各 hom 集合 $(C/R)(a, b)$ をそこの同値関係 R' による $C(a, b)$ の商 $C(a, b)/R'_{a,b}$ であるとする．関係は合成により保存されるので，C での合成は明らかな射影 $Q : C \to C/R$ により C/R に持ち越される．いま，任意の函手 $H : C \to D$ について集合 $S_{a,b} = \{f, f' : a \to b \,|\, Hf = Hf'\}$ は明らかに C 上の合同関係を形作る．したがって $S \supset R$ ならば $S \supset R'$ でもあり，要求通りに H は $H = H' \circ Q_R$ と分解される．　□

C がグラフ G によって生成される自由圏である場合，C/R を**生成元** (generator) G と**関係** (relation) R を持つ圏と呼ぶ．たとえば $\mathbf{3}$ は，三つの対象 0, 1, 2 と三つの射 $f : 0 \to 1$, $g : 1 \to 2$, $h : 0 \to 2$，および一つの関係 $h = g \circ f$ から生成される圏として記述することができる．特別な場合（対象が一つ）として，これは生成元と関係により与えられるモノイドの場合を含んでいる．

演習問題

1. グラフ



と一つの関係 $g'f = f'g$ により生成される圏は，四つの恒等射とちょうど五つの恒等射でない射 f, g, f', g', $g'f = f'g$ を持つことを示せ.

2. C が（一対象の圏と見なした）群 G であるとき，C 上の各合同関係 R に対して，fRg であるのは $g^{-1}f \in N$ であり，かつそのときに限るような G の正規部分群 N が存在することを示せ.

注釈

本章を導いてきたアイデアは，函手という単純な概念を適切な複合的な圏 —— 共変函手における逆圏，双函手における積圏，実際は積の随伴としての函手圏，普遍射を始対象に還元するコンマ圏 —— を定義することにより複合的な場合に適用するというものである．函手圏（「図式の圏 (category of diagrams)」と呼ばれることもある）を用いることの重要性は Grothendieck[1957] や Freyd [1964] で強調されていた．特別な場合ではしばしば用いられていたコンマ圏の概念は，Lawvere の（未出版の）学位論文 [1963] において集合を用いずに随伴函手の記述を与えるために完全に一般的な形で導入された．しばらくの間，それは物知りの専門家の兵器庫にある秘密道具の一種であった.

双対性には長い歴史がある．幾何学，特に射影幾何学における点と線の間の双対性は，Veblen-Young による射影幾何学についての記念碑的論文における公理的双対性の鋭い記述につながった．逆圏による双対性の明示的な記述は，圏の同値としてもしくは圏と逆圏の同値として現れる（第 IV 章第 4 節）ポントリャーギン双対性におけるようにしばしば好ましいものとなる（Negrepontis [1971] を見られたい）.

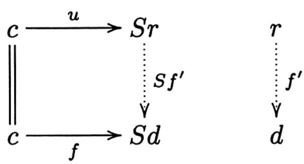
第 III 章　普遍的構成と極限

普遍的構成 (universal construction) は数学全体を通じて様々な形で現れる —— 与えられた函手への普遍射として，与えられた函手からの普遍射として，あるいは集合値函手の普遍要素として．各普遍的構成はそれに対応する集合値函手の hom 函手としての表現を決定している．こういった表現は次に米田の補題によって解析される．極限は —— 逆極限（＝射影的極限＝極限＝左根 (left root)）とその双対である順極限 (direct limit)（＝帰納的極限 (inductive limit) ＝余極限＝右根 (right root)）のどちらも —— 普遍的構成の重要な例である．本章では普遍的構成と極限を定義し，いくつかの基本的なタイプの極限（積，引き戻し，イコライザ，...）を調べる．特別な極限についてのさらに深い性質は第 IX 章で現れる．随伴との関係は第 V 章で扱われる．

1　普遍射

忘却函手 $U : \mathbf{Cat} \to \mathbf{Grph}$ とグラフ G が与えられたとき，G 上の自由圏 C と G を C に埋め込むグラフモルフィズム $P : G \to UC$ を構成し（第 II 章第 7 節），この射 P が G から U に向かう中で「普遍的」であることを示した．同様の普遍性 (universal property) は，群や環といった他のタイプの自由代数系に生成元を埋め込むモルフィズムについても成り立つ．ここではその一般的な概念を示す．

定義 1 $S: D \to C$ が函手であり c が C の対象であるとき，c から S への**普遍射** (universal arrow) とは，D の対象 r と C の射 $u: c \to Sr$ からなる対 $\langle r, u \rangle$ で，D の対象 d と C の射 $f: c \to Sd$ からなるすべての対 $\langle d, f \rangle$ について $Sf' \circ u = f$ となる D の一意的な射 $f': r \to d$ が存在するものである．言い換えれば，S へのすべての射 f は，可換図式



(1)

のように普遍射 u を通じて一意的に分解される．

同じことだが，$u: c \to Sr$ が c から S に向かう中で普遍的であるのは，対象が射 $c \to Sd$ であるようなコンマ圏 $(c \downarrow S)$ で対 $\langle r, u \rangle$ が始対象であるときである．始対象によれば，$\langle r, u \rangle$ は $(c \downarrow S)$ で同型を除いて一意的であることがわかる．特に D の対象 r は D で同型を除いて一意的である．ここで述べられているのはコンマ圏の典型的な用法である．

この普遍射という概念には非常に様々な例がある．いくつか並べてみよう．

ベクトル空間の基底． $\mathbf{Vct}_K$ は固定した体 K 上のすべてのベクトル空間からなり線型変換を射とする圏を表すものとする．$U: \mathbf{Vct}_K \to \mathbf{Set}$ は各ベクトル空間 V をその要素の集合に写す忘却函手である．任意の集合 X について，X を基底ベクトルとするよく知られたベクトル空間 V_X が存在する．これは X の要素のすべての形式的 K-線型結合からなる．各 $x \in X$ を，V_X のベクトルと見なして同じ x に写す関数は射 $j: X \to U(V_X)$ である．他の任意のベクトル空間 W について，各関数 $f: X \to U(W)$ は $Uf' \circ j = f$ を満たす一意的な線型変換 $f': V_X \to W$ に拡張できるという事実がある．このよく知られた事実はまさに j が X から U への普遍射であることを述べている．

グラフから生成される自由圏． グラフ G 上の自由圏 C についての第 II 章第 7 節の定理 1 はまさに函手 $P: G \to UC$ が普遍的であることを述べている．同じ所見は，与えられた生成元の集合上の自由モノイド，与えられた生成元の集合上の自由群，与えられた生成元の集合上の（与えられた環 R 上の）

自由 R-加群，与えられた生成元の集合を変数集合とする与えられた可換環上の多項式代数など，多くの自由代数系の場合に適用される．

商体．任意の整域 D に対して，よく知られた構成により D の商体 $Q(D)$ と単射準同型 $j : D \to Q(D)$（しばしば D を $Q(D)$ の部分整域とすることにより定式化される）が得られる．この商体は普通 D を含む最小の体として記述される．これは $D \subset K$ である各体 K について，共通する部分整域 D の上では恒等写像であるような体の単射準同型 $f : Q(D) \to K$ が存在するという意味である．しかしながら，この包含 $D \subset K$ は容易に任意の整域の単射準同型 $D \to K$ で置き換えることができる．ゆえに我々の言明は，対 $\langle Q(D), j\rangle$ が体の圏から整域の圏への忘却函手 $\mathbf{Fld} \to \mathbf{Dom}_m$ について —— $\mathbf{Dom}_m$ の射を整域の単射準同型とすると —— 普遍的であるということを意味している（体の準同型は必ず単射準同型であることに注意されたい）．しかしながらすべての整域準同型を射とするもっと大きな圏 $\mathbf{Dom}$ については，各整域から体への普遍射は存在しない．たとえば整数からなる整域 $\mathbf{Z}$ については，各素数 p について準同型 $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_p$ が存在する．これにより $\mathbf{Z}$ から函手 $\mathbf{Fld} \to \mathbf{Dom}$ への普遍射の構成が不可能となることに読者は気付くはずである．

完備距離空間．$\mathbf{Met}$ はすべての距離空間 $X, Y, \ldots$ からなり距離を保存する（それゆえ必然的に単射である）関数を射 $X \to Y$ とする圏であるとする．完備距離空間は充満部分圏（の対象）をなす．距離空間 X のよく知られた完備化 $\overline{X}$ は,（完備距離空間から距離空間への）明らかな忘却函手について普遍的であるような射 $X \to \overline{X}$ を与える．

他にも多くの場合に，数学的対象を適切に完備化された対象に埋め込む関数は普遍射に翻訳することができる．普遍射の一意性という一般的な事実から，完備化された対象の，同型を除いた（誰がそれ以上を求めるだろうか？）一意性がわかる．

普遍性 (universality) という考えは「普遍要素」によって表現されることもある．D が圏であり $H : D \to \mathbf{Set}$ が函手であるとき，函手 H の**普遍要素** (universal element) は対象 $r \in D$ と要素 $e \in Hr$ の対 $\langle r, e\rangle$ で，$x \in Hd$ となるすべての対 $\langle d, x\rangle$ について $(Hf)e = x$ となる D の射 $f : r \to d$ が一意的に存在するものである．

よく知られている構成の多くは自然に普遍要素の例となっている．たとえば，集合 S の上の同値関係 E, S の要素の E の下での同値類からなる対応する商集合 S/E，および各 $s \in S$ をその E-同値類に写す射影 $p : S \to S/E$ を考えてみよう．いま S/E は，同値なものを同じものに写す S 上の任意の関数 f を S/E 上の関数と見なすことができるというよく知られた性質を持つ．より形式的にはこのことは，sEs' のときにいつでも $f : S \to X$ が $fs = fs'$ を満たすならば，f は一意的な関数 $f' : S/E \to X$ について合成 $f = f'p$ と書くことができるということを意味する：

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{p} & S/E \\ \| & & \vdots\, f' \\ S & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

このことはまさに $\langle S/E, p\rangle$ が，各集合 X に対して sEs' から $fs = fs'$ が従うすべての関数 $f : S \to X$ からなる集合 HX を割り当てる函手 $H : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ の普遍要素であるということを述べている．

再び N を群 G の正規部分群としよう．各 $g \in G$ を商群 G/N におけるその余集合 $pg = gN$ に写す通常の射影 $p : G \to G/N$ は，各群 G' に対して N を殺す（$fN = 1$ となる）すべての準同型 $f : G \to G'$ からなる集合 HG' を割り当てる函手 $H : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ の普遍要素である．実際すべてのこのような準同型は，一意的な $f' : G/N \to G'$ について $f = f'p$ と分解される．ところで商群は通常その要素が余集合である群として記述される．しかしながら，$p : G \to G/N$ のこの一つの「普遍」性を証明するのに余集合をいったん使えば，商群の他のすべての性質 —— たとえば同型定理 —— はそれ以上余集合に言及せずに証明することができる (Mac Lane–Birkhoff [1967])．必要となるのは函手 H の普遍要素 p の存在だけである．さらに言えば，この存在すら余集合を用いずに証明することもできるだろう（第 V 章第 6 節で述べられている随伴函手定理を見られたい）．

テンソル積から普遍要素に対する別の例が得られる．体 K 上の二つのベクトル空間 V および V' が与えられたとき，各ベクトル空間 W に対してすべての双線型関数 $V \times V' \to W$ の集合 $HW = \mathrm{Bilin}(V, V'; W)$ を割り当て

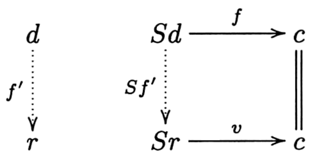
る関数 H は函手 $H : \mathbf{Vct}_K \to \mathbf{Set}$ の対象関数になる．また，テンソル積の通常の構成によって，ベクトル空間 $V \otimes V'$ と，普通は $\langle v, v' \rangle \mapsto v \otimes v'$ と書かれる双線型関数 $\otimes : V \times V' \to V \otimes V'$ の両方が得られる．よって，対 $\langle V \otimes V', \otimes \rangle$ は函手 $H = \mathrm{Bilin}(V, V'; -)$ に対する普遍要素である．このことは，体 K が可換環に置き換えられても（そしてベクトル空間が K-加群に置き換えられても）同様に成り立つ．

「普遍要素」という概念は「普遍射」の概念の特別な場合である．実際，$*$ を一点集合とすると，任意の要素 $e \in Hr$ は $\mathbf{Ens}$ の射 $e : * \to Hr$ と見なすことができる．したがって H の普遍要素 $\langle r, e \rangle$ は $*$ から H への普遍射に他ならない．逆に，C が小さな hom 集合を持つときには,「普遍射」の概念は「普遍要素」の概念の特別な場合である．実際，$S : D \to C$ が函手であり $c \in C$ が対象であるとき，$\langle r, u : c \to Sr \rangle$ が c から S への普遍射であるのは $\langle r, u \in C(c, Sr) \rangle$ が函手 $H = C(c, S-)$ の普遍要素であるときであり，かつそのときに限る．これは

$$d \mapsto C(c, Sd)\ , \qquad h \mapsto C(c, Sh)$$

により D の対象 d と射 h に作用する函手である．

ここまでは対象 $c \in C$ から函手 $S : D \to C$ への普遍射を取り扱ってきた．その双対概念も有用である．S から c への**普遍射** (universal arrow) とは対象 $r \in D$ とコドメインが c である射 $v : Sr \to c$ からなる対 $\langle r, v \rangle$ で，$f : Sd \to c$ であるすべての対 $\langle d, f \rangle$ に対して可換図式



のように，$f = v \circ Sf'$ である一意的な $f' : d \to r$ が存在するものである．

（$C = \mathbf{Grp}, \mathbf{Set}, \mathbf{Cat}, \ldots$ について）C の積の射影 $p : a \times b \to a$, $q : a \times b \to b$ はこのような普遍的構成の例である．実際，他に a と b への任意の射の対 $f : c \to a$, $g : c \to b$ が与えられたとき，$ph = f$, $qh = g$ を満たす一意的な $h : c \to a \times b$ が存在する．したがって $\langle p, q \rangle$ は「普遍的な対」である．これを普遍射にするために $\Delta c = \langle c, c \rangle$ である対角函手 (diagonal

functor) $\Delta : C \to C \times C$ を導入する[1]. すると上の対 f, g は $C \times C$ における射 $\langle f, g\rangle : \Delta c \to \langle a, b\rangle$ になり, $\langle p, q\rangle$ は Δ から対象 $\langle a, b\rangle$ への普遍射となる.

同様に（**Ab**, **Grp**, **Rng**, R-**Mod**, ... における）準同型の核 (kernel) は普遍的構成, より正確には適切な反変函手についての普遍的構成である.

ここでは「普遍」と「余普遍」ではなく「S への普遍射」と「S からの普遍射」と言っていることに注意されたい.

演習問題

1. 以下のよく知られた構成がそれぞれどのように普遍射に翻訳できるかを示せ：
   (a) ある群（モノイドならばさらによい）の整域上の群環 (group ring).
   (b) あるベクトル空間のテンソル代数.
   (c) あるベクトル空間の外積代数.
2. 反変冪集合函手 $\mathcal{P} : \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ の普遍要素を見つけよ.
3. （与えられた任意の対象から）以下の忘却函手への普遍射を見つけよ：$\mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp}$, $\mathbf{Rng} \to \mathbf{Ab}$（積を忘れる）, $\mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$, $\mathbf{Set}_* \to \mathbf{Set}$.
4. （射影の）普遍性だけを用いて群論における以下の同型を証明せよ[2]：
   (a) $M \subset N$ である G の正規部分群 M, N について, $(G/M)/(N/M) \cong G/N$.
   (b) G の部分群 S と N について N が正規ならば, 合併 (join)（各々の元の積の全体）SN を取ると $SN/N \cong S/S \cap N$.
5. 商 K-加群 A/S（S は A の部分加群）が普遍性により記述されることを示せ. 上の同型定理を導け.
6. 両側イデアルによる環の商を普遍性を用いて記述せよ.
7. x を変項とする可換環 K 上の多項式環 $K[x]$ の構成が普遍的構成であることを示せ.

---

1 ［訳注］本書では, 函手 $\Delta : C \to C^J$ で J の任意の射 u について $\Delta(c)(u) = \mathrm{id}_c$ を満たすもの, すなわち Δc が c への定数函手になるものを対角函手と呼んでいる. ここで導入されているものは, J が二つの対象と恒等射のみからなる圏の場合と見なすことができる. 一般に対角函手と言うときにはこの函手を意味することが多い.

2 ［訳注］群についての同型定理と呼ばれる.

2 米田の補題

次に普遍性の概念的性質をいくつか考察する．まず最初に，普遍性は hom 集合を用いて以下のように定式化できる．

命題 1 函手 $S : D \to C$ について，対 $\langle r, u : c \to Sr \rangle$ が c から S への普遍射であるのは各 $f' : r \to d$ を $Sf' \circ u : c \to Sd$ に写す関数が hom 集合の全単射

$$D(r, d) \cong C(c, Sd) \tag{1}$$

であるときであり，かつそのときに限る．この全単射は d において自然である．逆に，r と c が与えられたとき，任意の自然同型 (1) は $\langle r, u \rangle$ が c から S に向かう中で普遍的であるような一意的な射 $u : c \to Sr$ によって上記のように決定される．

証明 $\langle r, u \rangle$ が普遍的であるという言明は $f' \mapsto Sf' \circ u = f$ が全単射であるという言明に他ならない．この全単射は d において自然である．なぜなら $g' : d \to d'$ のとき $S(g'f') \circ u = Sg' \circ (Sf' \circ u)$ だからである．

逆に，自然同型 (1) は D の各対象 d について全単射 $\varphi_d : D(r, d) \to C(c, Sd)$ を与える．特に対象 d が r になるように選ぶと，恒等射 $1_r \in D(r, r)$ は φ_r により C の射 $u : c \to Sr$ に写る．任意の $f' : r \to d$ について図式

$$\begin{array}{ccc} D(r, r) & \xrightarrow{\varphi_r} & C(c, Sr) \\ {\scriptstyle D(r, f')}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle C(c, Sf')} \\ D(r, d) & \xrightarrow{\varphi_d} & C(c, Sd) \end{array} \tag{2}$$

は φ が自然なので可換になる．しかしこの図式で $1_r \in D(r, r)$ は（上から右を通って）$Sf' \circ u$ に写り（左から下を通って）$\varphi_d(f')$ に写る．φ_d は全単射なのでこれはちょうど各 $f : c \to Sd$ が一意的な $f' = \varphi_d^{-1}(f)$ について $f = Sf' \circ u$ という形になるということを述べている．これは $\langle r, u \rangle$ が普遍的であるという言明に他ならない． □

C と D が小さな hom 集合を持つとき，この結果 (1) は **Set** への函手 $C(c, S-)$ が共変 hom 函手 $D(r, -)$ と自然同型であることを述べている．こ

のような同型は表現と呼ばれる．

定義 2 D が小さな hom 集合を持つとする．ある函手 $K : D \to \mathbf{Set}$ の**表現** (representation) とは D の対象 r と自然同型

$$\psi : D(r, -) \cong K \tag{3}$$

からなる対 $\langle r, \psi \rangle$ である．この対象 r は**表現対象** (representing object) と呼ばれる．表現が存在するとき，函手 K は**表現可能** (representable) であると言う．

したがって表現可能函手は同型を除けば共変 hom 函手 $D(r, -)$ だけである．この概念は普遍射と以下のように関係付けることができる．

命題 2 $*$ が任意の一点集合を表し D が小さな hom 集合を持つとする[3]．$\langle r, u : * \to Kr \rangle$ が $*$ から $K : D \to \mathbf{Set}$ への普遍射であるとき，D の各対象 d について射 $f' : r \to d$ を $K(f')(u(*)) \in Kd$ に写す関数 ψ は K の表現である．また K のすべての表現はちょうど一つのこういった普遍射からこのように得られる．

証明 任意の集合 X について一点集合 $*$ から X への関数 $f : * \to X$ は要素 $f(*) \in X$ によって決定される．この対応 $f \mapsto f(*)$ は全単射 $\mathbf{Set}(*, X) \xrightarrow{\cdot} X$ であり $X \in \mathbf{Set}$ において自然である．K と合成すると自然同型 $\mathbf{Set}(*, K-) \xrightarrow{\cdot} K$ となる．これに (3) の表現 ψ を合わせると

$$\mathbf{Set}(*, K-) \cong K \cong D(r, -)$$

となる．それゆえ K の表現と自然同型 $\mathbf{Set}(*, K-) \cong D(r, -)$ は互いに一方から他方が求まる．よってこの命題は前の命題から従う． □

直接的な証明も同じく容易である．普遍射 u が与えられたとき対応 $f' \mapsto K(f')(u(*))$ は表現である．また (3) のような表現 ψ が与えられたとき ψ_r は $1 : r \to r$ を Kr の要素に写すが，これは普遍要素であり，ゆえに［$*$ をそ

3 ［訳注］ここでは一点集合とその要素を同じ記号 $*$ で表す．

の要素に写す関数で表せば］普遍射 $* \to Kr$ でもある.

「普遍射」,「普遍要素」,「表現可能函手」という概念はそれぞれ他の二つの概念を包含する. したがって, c から $S : D \to C$ への普遍射は自然同型 $D(r, d) \cong C(c, Sd)$ と等価なので（命題 1）函手 $C(c, S-) : D \to \mathbf{Set}$ の表現と等価であり, 同時にその同じ函手の普遍要素とも等価になる.

命題 1 の議論は各自然変換 $\varphi : D(r, -) \overset{\cdot}{\to} K$ が恒等射 $1 : r \to r$ の φ_r による像から完全に決まるという次の所見に基づいていた.

補題 3 （米田）.（小さな hom 集合を持つ圏 D について）$K : D \to \mathbf{Set}$ が D からの函手であり, r が D の対象であるとすると, 各自然変換 $\alpha : D(r, -) \overset{\cdot}{\to} K$ を恒等射 $r \to r$ の像 $\alpha_r 1_r$ に写す全単射

$$y : \mathrm{Nat}(D(r, -), K) \cong Kr \tag{4}$$

が存在する.

証明は以下の可換図式によって示される.

$$\begin{array}{ccccc} D(r,r) & \xrightarrow{\alpha_r} & K(r) & \quad & r \\ {\scriptstyle f_* = D(r,f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle K(f)} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ D(r,d) & \xrightarrow{\alpha_d} & K(d) & & d \end{array} \tag{5}$$

系 4 対象 $r, s \in D$ について各自然変換 $D(r, -) \overset{\cdot}{\to} D(s, -)$ は一意的な射 $h : s \to r$ について $D(h, -)$ という形になる.

(4) の米田写像 y は K と r において自然である. この事実を形式的に述べるためには, K を函手圏 $\mathbf{Set}^D$ の対象と考え, 写像 y のドメインとコドメインの両方を対 $\langle K, r \rangle$ の函手と見なし, この対を圏 $\mathbf{Set}^D \times D$ の対象と考えなければならない. このとき y のコドメインは評価函手 (evaluation functor) E であり, これは各対 $\langle K, r \rangle$ を函手 K の対象 r における値 Kr に写す. ドメインは, 対象 $\langle K, r \rangle$ をすべての自然変換の集合 $\mathrm{Nat}(D(r, -), K)$ に写し, 射 $F : K \to K'$, $f : r \to r'$ の対を $\mathrm{Nat}(D(f, -), F)$ に写す函手 N である. これらの所見により, **米田の補題** (Yoneda Lemma) への次の付け足しを直ちに証明することができる.

補題 5 (4) の全単射は函手 $E, N : \mathbf{Set}^D \times D \to \mathbf{Set}$ の間の自然同型 $y : N \dot{\to} E$ である．

対象関数 $r \mapsto D(r, -)$ と D の射 f についての射関数

$$(f : s \to r) \mapsto D(f, -) : D(r, -) \dot{\to} D(s, -)$$

を合わせると**米田函手** (Yoneda functor) と呼ばれる充満忠実な函手

$$Y : D^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}^D \tag{6}$$

が定義される．その双対はもう一つのこのような（忠実でもある）函手

$$Y' : D \to \mathbf{Set}^{D^{\mathrm{op}}} \tag{7}$$

であり，$f : s \to r$ を自然変換

$$D(-, f) : D(-, s) \dot{\to} D(-, r) : D^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$$

に写す．これらの函手が定義されるには D が小さな hom 集合を持たなければならない（なぜなら $\mathbf{Set}$ はすべての小さな圏からなる圏だから）．より大きな D については，対象が集合 $X, Y, \ldots$ で $\mathbf{Ens}(X, Y)$ が X から Y へのすべての関数の集合となるような任意の圏 $\mathbf{Ens}$ で $\mathbf{Set}$ を置き換えれば，米田の補題はそのまま成り立つ．もちろん D が $\mathbf{Ens}$ の対象である hom 集合を持つならばであるが.（自然性の意味は $\mathbf{Ens}$ にさらに拡張しても変わらない．演習問題 4 を見られたい.）

演習問題

1. 函手 $K, K' : D \to \mathbf{Set}$ はそれぞれ表現 $\langle r, \psi \rangle$ と $\langle r', \psi' \rangle$ を持つものとする．各自然変換 $\tau : K \dot{\to} K'$ について

$$\tau \circ \psi = \psi' \circ D(h, -) : D(r, -) \dot{\to} K'$$

となる D の一意的なモルフィズム $h : r' \to r$ が存在することを証明せよ．

2. 米田の補題の双対を述べよ（D は D^{op} で置き換えられる）．
3. （カン．余米田補題 (coyoneda lemma)）．$K : D \to \mathbf{Set}$ について $(* \downarrow K)$ は要素 $x \in Kd$ からなる圏であり，$Q : (* \downarrow K) \to D$ は射影 $x \in Kd \mapsto d$ であ

り，各 $a \in D$ に $a : (* \downarrow K) \to D$ を対応させるのは対角函手であって函手 a はすべてを定数値 a に写す．自然同型

$$\mathrm{Nat}(K, D(a,-)) \cong \mathrm{Nat}(a, Q)$$

を証明せよ．

4. （自然性はコドメインの圏を拡張しても変わらない）．E を E' の充満部分圏とする．函手 $K, L : D \to E$ について，$J : E \to E'$ を包含として，$\mathrm{Nat}(K, L) \cong \mathrm{Nat}(JK, JL)$ を証明せよ．

3 余積と余極限

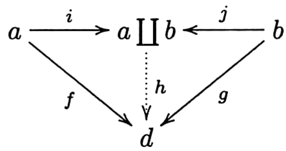
ここでは様々な特別な場合を考えることにより余極限を導入する．それらはいずれもある普遍射である．

余積 (coproduct)．任意の圏 C について，対角函手 $\Delta : C \to C \times C$ は，対象については $\Delta(c) = \langle c, c \rangle$ により，射については $\Delta(f) = \langle f, f \rangle$ により定義される．$C \times C$ の対象 $\langle a, b \rangle$ から函手 Δ への普遍射は**余積図式** (coproduct diagram) と呼ばれる．これは C の対象 c と $C \times C$ の射 $\langle a, b \rangle \to \langle c, c \rangle$ からなる．すなわち a および b から共通のコドメイン c への射 $i : a \to c$, $j : b \to c$ の対である．この対は次のよく知られた普遍性を持つ．すなわち任意の射の対 $f : a \to d$, $g : b \to d$ について，$f = h \circ i$, $g = h \circ j$ を満たす一意的な射 $h : c \to d$ が存在する．このような余積図式が存在するとき，対象 c は（C で同型を除いて）必ず一意的である．これは $c = a \amalg b$ または $c = a + b$ と書かれ，**余積対象** (coproduct object) と呼ばれる．このとき余積図式は

$$a \xrightarrow{\ i\ } a \amalg b \xleftarrow{\ j\ } b$$

となり，射 i と j は（関数として入射的 (injective) である必要はないにもかかわらず）余積 $a \amalg b$ の入射と呼ばれる[4]．この図式の普遍性は，次の形の任意の図式を一意的な h で可換にできるということを述べている．

[4] ［訳注］関数としての injection は monomorphism と同じ意味であり単射と訳されることが多いが，混乱を避けるために本書では関数として用いられるときには単射と訳し，余極限の射は入射と訳した．



(1)

ゆえに割り当て $\langle f, g\rangle \mapsto h$ は d において自然な全単射

$$C(a,d) \times C(b,d) \cong C(a \amalg b,\, d) \tag{2}$$

であり，逆 $h \mapsto \langle hi,\, hj\rangle$ を持つ．C の対象 a, b からなるすべての対が余積を持つとき，各対について余積図式を選べば余積 $\amalg : C \times C \to C$ は双函手となり，射 $h : a \to a'$, $k : b \to b'$ について $h \amalg k$ は $(h \amalg k)i = i'h$, $(h \amalg k)j = j'k$ を満たす一意的な射 $h \amalg k : a \amalg b \to a' \amalg b'$ として定義される（図式を描いてみよう！）．

図式 (1) は他の見かけの方がよく知られている．たとえば **Set** で $a \amalg b$ を集合 a と b の直和 (disjoint union)（すなわち a と b の共通部分を持たないコピーの和集合）とし，i と j は包含写像 $a \subset a \amalg b$, $b \subset a \amalg b$ とする．いま直和上の関数 h は，a と b 上の値をそれぞれ独立に与えることによって，すなわち合成 hi と hj を与えることによって一意的に決まる．このことはまさに，図式 (1) を一意的に h で可換にできるということを言っている．また確かに直和は一意的ではなく全単射を除いて一意的であり，このおかげで普遍的構成になっている．

よく知られている圏の多くでは任意の二つの対象について余積が存在する．そこでは余積には以下のリストに示すような様々な名前が付いている．

Set	集合の直和
Top	位相空間の直和
$\mathbf{Top}_*$	くさび積 (wedge product) （二つの位相空間を基点で合併する）
Ab, R-**Mod**	直和 (direct sum) $A \oplus B$
Grp	自由積
CRng	テンソル積 $R \otimes S$

前順序 P において二つの要素 a と b の最小上界 $a \cup b$ は，もし存在すれば次の性質を持つ要素 $a \cup b$ である．(i) $a \leqq a \cup b$, $b \leqq a \cup b$，かつ (ii) $a \leqq c$

かつ $b \leqq c$ ならば $a \cup b \leqq c$. これらの性質はまさに P を圏と見なせば $a \cup b$ が a と b の余積であることを述べている．

無限余積．余積の記述において $C \times C = C^2$ を任意の集合 X について C^X で置き換える．ここで集合 X を離散圏と見なすと，函手圏 C^X は X で添字付けされた C の対象の族 $a = \{a_x \,|\, x \in X\}$ が対象である．対応する対角函手 $\Delta : C \to C^X$ は各 c を定数の族（すべての $c_x = c$）に写す．a から Δ への普遍射は X 項の余積図式である．これは必要な普遍性を持つ余積対象 $\amalg_x a_x \in C$ と C の射（余積入射）$i_x : a_x \to \amalg_x a_x$ からなる．この普遍性は割り当て $f \mapsto \{fi_x \,|\, x \in X\}$ が全単射

$$C(\amalg_x a_x, c) \cong \prod_{x \in X} C(a_x, c) \tag{3}$$

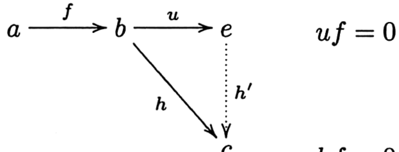
であり c において自然であることを述べている．**Set** では余積は X 項の直和である．

余冪．余積の因子がすべて等しい（任意の x について $a_x = b$）とき，余積 $\amalg_x b$ は**余冪** (copower) と呼ばれて $X \cdot b$ と書かれる．よって

$$C(X \cdot b,\, c) \cong C(b,\, c)^X \tag{4}$$

となり c において自然である．たとえば **Set** では $b = Y$ を集合とすると余冪 $X \cdot Y = X \times Y$ は集合 X と Y のカルテシアン積である．

余核．C が任意の二つの対象 $b, c \in C$ についてゼロ射 $0 : b \to z \to c$ が存在するようなヌル対象 z を持つと仮定する．このとき $f : a \to b$ の余核 (cokernel) は射 $u : b \to e$ で (i) $uf = 0 : a \to e$ かつ (ii) $h : b \to c$ が $hf = 0$ のとき一意的な $h' : e \to c$ について $h = h'u$ となるものである．図では次のようになる．

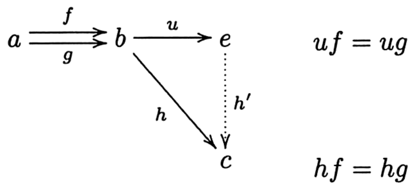


(5)

Ab では $f : A \to B$ の余核は B のある商群への射影 $B \to B/fA$ であり，他の多くのこういった圏では本質的に余核はある適切な商対象である．しか

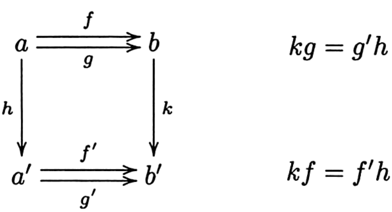
しながらヌル対象がない圏では余核は使えない．よってさらに一般的に，ある「コイコライザ」を考える．

コイコライザ．C において同じドメイン a と同じコドメイン b を持つ射の対 $f, g : a \to b$ が与えられたとき，$\langle f, g\rangle$ の**コイコライザ** (coequalizer) とは射 $u : b \to e$（もしくは対 $\langle e, u\rangle$）で (i) $uf = ug$ かつ (ii) $h : b \to c$ が $hf = hg$ のとき一意的な射 $h' : e \to c$ について $h = h'u$ となるものである．図では次のようになる．

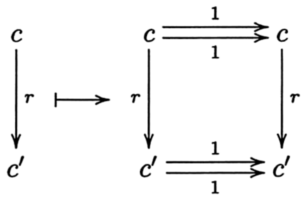


(6)

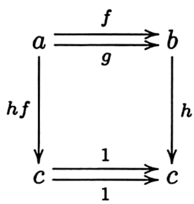
コイコライザ u は以下のように普遍射として翻訳できる．$\downarrow\downarrow$ を，ちょうど二つの対象と，第一の対象から第二の対象への二つの恒等射でない射からなる圏を表すものとする．したがってその圏は $\cdot \rightrightarrows \cdot$ である．函手圏 $C^{\downarrow\downarrow}$ を作ってみる．このとき $C^{\downarrow\downarrow}$ の対象は $\cdot \rightrightarrows \cdot$ から C への函手である．すなわち C における平行な射 $a \rightrightarrows b$ の対 $\langle f, g\rangle : a \to b$ である．$C^{\downarrow\downarrow}$ におけるこのような一つの対 $\langle f, g\rangle$ から別の $\langle f', g'\rangle$ への射は対応する函手の間の自然変換である．このことは，それが C における射 $h : a \to a'$ と $k : b \to b'$ の対 $\langle h, k\rangle$ で



の f の正方図式および g の正方図式を可換にするものであることを意味する．対角函手 $\Delta : C \to C^{\downarrow\downarrow}$ も存在し，C の対象 c と射 r の上で



のように定義され，記号で書くと $\Delta c = \langle 1_c, 1_c \rangle$ かつ $\Delta r = \langle r, r \rangle$ となる．いま対 $\langle f, g \rangle : a \to b$ が与えられたとき，$hf = hg$ となる射 $h : b \to c$ は函手圏 $C^{\downarrow\downarrow}$ の射 $\langle hf = hg, h \rangle : \langle f, g \rangle \to \langle 1_c, 1_c \rangle$ と同じものである．



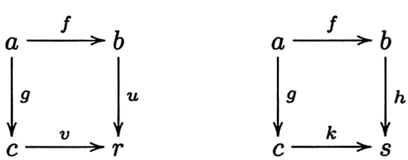
$$hf = hg$$

言い換えれば，f と g を「コイコライズ」する射 h は $\langle f, g \rangle$ から Δ への射である．それゆえ対 $\langle f, g \rangle$ のコイコライザ $\langle e, u \rangle$ は $\langle f, g \rangle$ から Δ への普遍射に他ならない．

a から b への写像からなる任意の集合についてのコイコライザも同様に定義される．

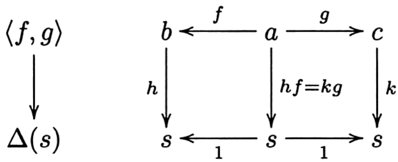
Ab では二つの準同型 $f, g : A \to B$ のコイコライザは（差の準同型の像による）B の商群への射影 $B \to B/(f-g)A$ である．**Set** では二つの関数 $f, g : X \to Y$ のコイコライザは，すべての $x \in X$ についての対 $\langle fx, gx \rangle$ を含む最小の同値関係 $E \subset Y \times Y$ による Y の商集合への射影 $p : Y \to Y/E$ である．商位相を用いれば **Top** においても同じ構成でコイコライザが得られる．

押し出し．C において共通のドメイン a を持つ射の対 $f : a \to b$, $g : a \to c$ が与えられたとき，$\langle f, g \rangle$ の**押し出し** (pushout) とは下の左側の可換図式で，



(7)

f, g に接する他の任意の可換正方図式（上の右側）について，$tu = h$ と $tv = k$ が成り立つ一意的な $t : r \to s$ が存在するものである．言い換えれば押し出しとは，側面 f, g に接する可換正方図式を完成させる普遍的な方法である．これは普遍射に翻訳することができる．$\cdot \leftarrow \cdot \rightarrow \cdot$ をその見かけ通りの圏を表すものとしよう．このとき函手圏 $C^{\cdot\leftarrow\cdot\rightarrow\cdot}$ の対象は共通のドメインを持つ C の射の対 $\langle f, g \rangle$ であり，一方 $\Delta(c) = \langle 1_c, 1_c \rangle$ は自明な「対角」函手 $\Delta : C \to C^{\cdot\leftarrow\cdot\rightarrow\cdot}$ の対象関数である．このとき上の右側の可換正方図式 $hf = kg$ は，$\langle f, g \rangle$ から $\Delta(s)$ への $C^{\cdot\leftarrow\cdot\rightarrow\cdot}$ の射



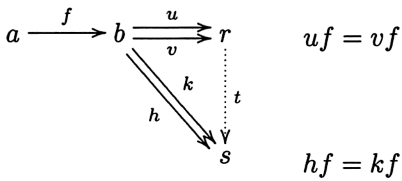
と読むことができる．押し出しとはこのような射で普遍的なものである．その頂点 r は（一意的な）同型を除いて一意的に決定されるのだが，それはしばしば「a 上の」余積

$$r = b \amalg_a c = b \amalg_{\langle f, g \rangle} c$$

のように書かれ,「ファイバー和 (fibered sum)」もしくは「コカルテシアン正方図式 (cocartesian square)」（の頂点）と呼ばれる．**Set** では $\langle f, g \rangle$ の押し出しは常に存在する．それは直和 $b \amalg c$ で各 $x \in a$ について要素 fx と gx を同一視したものである．同様の構成により **Top** における押し出しが得られる —— そこには添加空間 (adjunction space) のような有用な構成が含まれる．**Grp** にも押し出しは存在する．特に上の f と g が **Grp** でモニックならば押し出し正方図式の射 u と v もモニックであり，頂点 r は b と c の「融合積 (amalgamated product)」と呼ばれる．

余核対． C の射 $f : a \to b$ が与えられたとき，f と f の押し出しは f の余核対 (cokernel pair) と呼ばれる．したがって f の余核対は対象 r およびドメインが b である射の平行対 $u, v : b \to r$ で，$uf = vf$ を満たし，さらに任意の平行対 $h, k : b \to s$ で $hf = kf$ を満たすものについて，$tu = h$ かつ

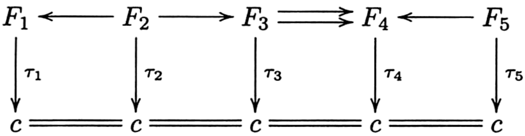
$tv = k$ を満たす一意的な $t : r \to s$ が存在するようなものである[5].



余極限. これまでのケースはすべて特別な函手圏を扱っており，次のようなパターンになっている．C と J を圏とする（J を添字圏 (index category) と呼ぶ．通常は小さく，しばしば有限である）．**対角函手** (diagonal functor)

$$\Delta : C \to C^J$$

は，各対象 c を定数函手 Δc —— 各対象 $i \in J$ における値が c となり，J の各射における値が 1_c となる函手 —— に写す．$f : c \to c'$ が C の射なら，Δf は J の各対象 i における値が同じ f となる自然変換 $\Delta f : \Delta c \xrightarrow{\cdot} \Delta c'$ となる．各函手 $F : J \to C$ は C^J の対象である．F から Δ への普遍射 $\langle r, u \rangle$ は函手 F についての**余極限** (colimit)（「順極限 (direct limit)」あるいは「帰納的極限 (inductive limit)」）図式と呼ばれる．これは C の対象 r と自然変換 $u : F \xrightarrow{\cdot} \Delta r$ からなり，前者は通常 $r = \varinjlim F$ や $r = \mathrm{Colim}\, F$ と書かれ，後者は自然変換 $\tau : F \xrightarrow{\cdot} \Delta c$ の中で普遍的である．Δc は定数函手なので，自然変換 τ は J の各対象 i に対応する C の射 $\tau_i : F_i \to c$ からなり，J の各射 $u : i \to j$ について $\tau_j \circ Fu = \tau_i$ が成り立つ．図で表すと（ある特定の J の選択についての）次の概略的な図式におけるすべての正方図式が可換でなければならない．

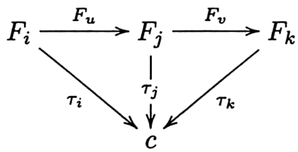


これらの図式をすべての「底 (base)」の対象を一つにまとめて視覚化すると都合がよい．この理由により，自然変換 $\tau : F \xrightarrow{\cdot} \Delta c$ （しばしば Δ を省略し

---

5 ［訳注］本書では「平行な射の二つ組」（ドメインとコドメインがそれぞれ等しい二つの射からなる組）をしばしば「（射の）平行対」と書く．

て $\tau : F \dot{\to} c$ と書かれる）は底 F から頂点 c への**錐** (cone) と呼ばれ[6]，次のように描かれる（すべての三角図式は可換である）．



この言葉で言えば，$F : J \to C$ の余極限は対象 $\varinjlim F \in C$ および底 F から頂点 $\varinjlim F$ への普遍的な錐 $\mu : F \dot{\to} \Delta(\varinjlim F)$ からなる．底 F からの任意の錐 $\tau : F \dot{\to} \Delta c$ について，一意的な射 $t' : \varinjlim F \to c$ が存在して，すべての添字 $i \in J$ について $\tau_i = t'\mu_i$ となる．μ を（F からの）**極限錐** (limiting cone) または**普遍錐** (universal cone) と呼ぶ．

たとえば $J = \omega = \{0 \to 1 \to 2 \to 3 \to \cdots\}$ として，ω のすべての射を包含（部分集合を全体集合の中に入れる写像）に写す函手 $F : \omega \to \mathbf{Set}$ を考えてみよう．このような函手 F は単に入れ子になっている集合の列 $F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots$ である．すべての集合 F_n の合併集合 U は，包含写像 $F_n \to U$ の与える錐により $\varinjlim F$ となる．同じく合併を特別な余極限とする翻訳は，**Grp**, **Ab** および他の身近な圏にも適用できる．読者は次のことをいますぐ確信したいかもしれないが，それはまもなく証明することになる（第 V 章第 1 節演習問題 8）．すなわち，J が小さいとき任意の $F : J \to \mathbf{Set}$ は余極限を持つ．

演習問題

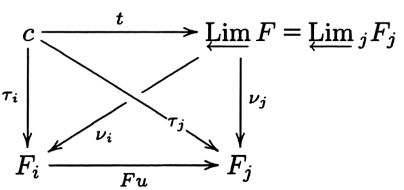
1. 可換環の圏において，写像 $r \mapsto r \otimes 1$, $1 \otimes s \leftarrow\!\shortmid s$ による $R \to R \otimes S \leftarrow S$ が余積図式であることを示せ．
2. 圏が（二項）余積とコイコライザを持つとき，押し出しも持つことを証明せよ．これを **Set**, **Grp**, **Top** に適用せよ．
3. 第 I 章第 2 節の圏 $\mathbf{Matr}_K$ において，二つの $m \times n$ 行列 A, B（すなわち $\mathbf{Matr}_K$ における二つの射 $n \to m$）のコイコライザを記述せよ．
4. **Cat**, **Mon**, **Grph** における余積を記述せよ（そしてそれらが存在することを示せ）．

[6] ［訳注］最近では余極限の定義に現れる錐は余錐 (cocone) と呼ぶことが多い．

5. E が集合 X 上の同値関係のとき，通常の同値類の集合 X/E が **Set** のコイコライザで記述できることを示せ．
6. a と b が C で余積を持つことと，$c \mapsto C(a, c) \times C(b, c)$ による函手 $C(a, -) \times C(b, -) : C \to \mathbf{Set}$ が表現可能であることが互いに従うことを示せ．
7. （すべてのアーベル群はその有限生成部分群の余極限である）．A がアーベル群であり，J_A がすべての有限生成部分群 $S \subset A$ を対象とし包含により順序付けられた前順序であるとき，A は自明な函手 $J_A \to \mathbf{Ab}$ の余極限であることを示せ．これを一般化せよ．

4 積と極限

極限概念は余極限の概念の双対である．圏 C, J と対角函手 $\Delta : C \to C^J$ が与えられたとき，函手 $F : J \to C$ についての**極限** (limit) とは Δ から F への普遍射 $\langle r, \nu \rangle$ である．これは C の対象 r，および C の対象 c についての自然変換 $\tau : \Delta c \stackrel{\cdot}{\to} F$ の中で普遍的である自然変換 $\nu : \Delta r \stackrel{\cdot}{\to} F$ からなる．この対象は通常 $r = \varprojlim F$ もしくは $\operatorname{Lim} F$ と書かれ，函手 F の**極限対象** (limit object)（「逆極限 (inverse limit)」あるいは「射影的極限 (projective limit)」）と呼ばれる．$\Delta c : J \to C$ は常に c となる函手なので，この自然変換 τ は J の各対象 i について C の一つの射 $\tau_i : c \to F_i$ からなり，J のすべての射 $u : i \to j$ について $\tau_j = Fu \circ \tau_i$ が成り立つ．$\tau : c \stackrel{\cdot}{\to} F$ は頂点 c から底 F への**錐**と呼んでもよい．(本書では「余錐」よりもむしろ「底 F への錐」と言うことにする[7])．ν の普遍性は次のようになる．ν は頂点 $\varprojlim F$ から底 F への錐であり，対象 c から F への任意の錐 τ について，一意的な射 $t : c \to \varprojlim F$ が存在してすべての i について $\tau_i = \nu_i t$ となる．この状況は



$\nu =$ 極限錐

---

7 ［訳注］前述のように，最近では余極限の定義に現れる錐を余錐と呼び，極限の定義に現れる錐は単に錐と呼ぶことが多い．

として図示できる．各錐は上を頂点とする可換な三角図式（これは数多くの図式の一つに過ぎない）によって表現されている．一意的な射 t が存在してこれにより付け加わる（下を頂点とする）三角図式をすべて可換にしている．あらゆる普遍的なものと同様に，対象 $\varprojlim F$ とその**極限錐** $\nu : \varprojlim F \to F$ も，函手 F により C での同型を除いて一意的に決定される．

$\varprojlim$ と $\varinjlim$ の性質は次の図式にまとめられる．

$$\begin{array}{ccccc}
\operatorname{Lim} F = \varprojlim F & \xrightarrow{\ \nu\ } & F & \xrightarrow{\ \mu\ } & \varinjlim F = \operatorname{Colim} F \\
\uparrow \vdots & & \Vert & & \vdots \downarrow \\
c & \xrightarrow[\ \tau\ ]{} & F & \xrightarrow[\ \sigma\ ]{} & c
\end{array} \tag{1}$$

ここで水平の射は錐であり，垂直の射は C の射である．極限が存在するとき次の自然同型が存在する．

$$C(c, \varprojlim F) \cong \operatorname{Nat}(\Delta c, F) = \operatorname{Cone}(c, F), \tag{2}$$

$$\operatorname{Cone}(F, c) = \operatorname{Nat}(F, \Delta c) \cong C(\varinjlim F, c). \tag{3}$$

様々な特別な極限にはよく知られている名前が付いており，余極限の名前と双対になっている．

積． J が離散圏 $\{1, 2\}$ のとき，函手 $F : \{1, 2\} \to C$ は C の対象の対 $\langle a, b\rangle$ である．極限対象は a と b の**積** (product) と呼ばれ，$a \times b$ もしくは $a \amalg b$ と書かれる．極限図式は次のように $a \times b$ と二つの射 p, q（pr_1, pr_2 と表すこともある）からなり，

$$a \xleftarrow{\ p\ } a \times b \xrightarrow{\ q\ } b$$

積の**射影**と呼ばれる．これらは頂点 $a \times b$ からの錐をなし，よって上の極限の定義により集合の全単射

$$C(c, a \times b) \cong C(c, a) \times C(c, b) \tag{4}$$

が存在して c において自然であり，各 $h : c \to a \times b$ を合成の対 $\langle ph, qh\rangle$ に写す．逆に，射 $f : c \to a$ と $g : c \to b$ が与えられたとき，$ph = f$ と $qh = g$ を満たす一意的な $h : c \to a \times b$ が存在する．ここでは

$$h = (f, g) : c \to a \times b$$

と書いて，h を f と g を**コンポーネント**とする射と呼ぶ．既に（第 II 章第 3 節で）見てきたように，**Cat**, **Grp**, **Top**, **Mon** においては任意の二つの対象の積が存在する．これらの場合には（そして他の多くの場合には）**直積** (direct product) と呼ばれる．前順序においては，積は最大下界 (greatest lower bound) である．

無限積．J が集合（= 離散圏 = すべての射が恒等射である圏）であるとき，函手 $F : J \to C$ は単に J で添字付けされた対象 $a_j \in C$ の族であり，頂点を c とし底を a_j とする錐は単に J で添字付けされた射 $f_j : c \to a_j$ の族である．したがって普遍錐 $p_j : \Pi_j a_j \to a_j$ は因子 (factor) a_j の**積**と呼ばれる対象 $\Pi_j a_j$ と積の**射影**と呼ばれる射 p_j からなり，以下の普遍性を満たす．すなわち各々の J で添字付けされた族（= 錐）$f_j : c \to a_j$ に対して一意的な f

$$f : c \to \Pi_j a_j \ , \qquad j \in J \text{ について } p_j f = f_j$$

が存在する．この性質によって一意的に決定される射 f は，f_j, $j \in J$ をコンポーネントとする（積への）射と呼ばれる．その上 $\{f_j \mid j \in J\} \mapsto f$ は全単射

$$\Pi_j C(c, a_j) \cong C(c, \Pi_j a_j) \tag{5}$$

であり，c において自然である．ここで右辺の積は C での積であり，左辺の積は **Set** で取られる（C が小さな hom 集合を持つことを仮定している）．hom 函手 $C(c, -)$ が C での積を **Set** での積に写すことを見てみよう（第 V 章第 4 節を見られたい）．**Set**, **Grp**, **Top** では任意の小集合 J 上の積が存在する．各々の場合それらはまさによく知られているカルテシアン積になる．

冪．積の因子がすべて等しい（すべての j について $a_j = b \in C$）とき，積 $\Pi_j a_j = \Pi_j b$ は**冪** (power) と呼ばれて $\Pi_j b = b^J$ と書かれ，そして

$$C(c, b)^J \cong C(c, b^J) \tag{6}$$

であり，c において自然である．左辺の冪は **Set** での冪であり，そこではすべての小さな冪 X^J が存在する（そしてそれはすべての関数 $J \to X$ からなる集合である）．

イコライザ．$J = \downarrow\downarrow$ のとき，函手 $F : \downarrow\downarrow \to C$ は C の平行する射からなる対 $f, g : b \to a$ である．F の極限対象 d が存在すれば，それは f と g のイ

コライザ (equalizer)（もしくは「差分核 (difference kernel)」）と呼ばれる．その極限図式は

$$d \xrightarrow{e} b \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} a, \qquad fe = ge \tag{7}$$

となる（極限射 e は頂点 d からの錐 $a \leftarrow d \rightarrow b$ をなす）．極限射もしばしば f と g のイコライザと呼ばれる．その普遍性は次のように解される．すなわち $fh = gh$ となる任意の $h : c \to b$ に対して，$eh' = h$ となる一意的な $h' : c \to d$ が存在する．

Set ではイコライザは常に存在する．実際，d は集合 $\{x \in b \,|\, fx = gx\}$ であり，$e : d \to b$ は b のこの部分集合から b への単射である．**Top** でもイコライザは同様に記述される（d は部分空間の位相を持つ）．**Ab** では f と g のイコライザ d は差分準同型 $f - g : b \to a$ の通常の核である．

b から a への射からなる任意の集合のイコライザも同様に定義される．任意のイコライザ e は必然的にモニックである．

引き戻し．$J = (\to \cdot \leftarrow)$ のとき，函手 $F : (\to \cdot \leftarrow) \to C$ は共通のコドメイン a を持つ C の射の対 $b \xrightarrow{f} a \xleftarrow{g} d$ である．このような函手の上の錐は次の（左側の）正方図式が可換になるような頂点 c からの射の対である．

$$\begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{k} & d \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ b & \xrightarrow[f]{} & a \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} b \times_a d & \xrightarrow{q} & d \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ b & \xrightarrow[f]{} & a \end{array} \tag{8}$$

このとき普遍射はこの形の可換正方図式で，右側に示したように $b \times_a d$ と書かれた新たな頂点と射 p, q を持ち，c を頂点とする任意の正方図式について $k = qr, h = pr$ を満たす一意的な $r : c \to b \times_a d$ が存在するものである．この普遍錐により形成される正方図式は**引き戻し正方図式** (pullback square) または「カルテシアン正方図式 (cartesian square)」と呼ばれ，普遍錐の頂点 $b \times_a d$ は引き戻し (pullback)，「ファイバー積 (fibered product)」，または（対象）a 上の積と呼ばれる．この構成は多くの圏で可能であり，最初に圏 **Top** で有名になった．$g : d \to a$ が（ある型の）「ファイバー写像 (fiber map)」で「底」が a であり，f がその底への連続写像のとき，引き戻しの射

影 p は（いま考えている型の）「誘導ファイバー写像 (induced fiber map)」である．

等しい射の対 $f : b \to a \leftarrow b : f$ の引き戻しが存在すれば，それは**核対** (kernel pair) と呼ばれる．それは対象 d と射の対 $p, q : d \to b$ であって，$fp = fq : d \to a$ であり，また $fh = fk$ を満たす任意の対 $h, k : c \to a$ が一意的な $r : c \to d$ について $h = pr$, $k = qr$ と書けるものである．

$J = \mathbf{0}$ が空の圏のとき，ちょうど一つの函手 $\mathbf{0} \to C$ が存在する．すなわち空函手である．この函手の上の錐は単なる対象 $c \in C$（すなわち単なる頂点）である．それゆえに $\mathbf{0}$ 上の普遍錐とは C の対象 t で各対象 $c \in C$ から一意的な射 $c \dashrightarrow t$ を持つものである．言い換えれば，C への空函手の極限は C の終対象である．

極限は函手よりもむしろ図式について定義されることもある．詳しく言うと，まず C を圏，UC を C の基底グラフ，G を任意のグラフとする．このとき C における形状 G の**図式**はグラフのモルフィズム $D : G \to UC$ である．いま**錐** $\mu : c \stackrel{\cdot}{\to} D$ を，各対象 $i \in G$ にグラフ G のすべての射 $h : i \to j$ について $Dh \circ \mu_i = \mu_j$ を満たす C の射 $\mu_i : c \to D_i$ を割り当てる関数として定義する．これは以前の錐の定義（自然変換 $\mu : \Delta c \stackrel{\cdot}{\to} D$）に他ならず，このことはこの定義が D のドメイン G ではなく C における射の合成を用いているという所見と結び付いている．このとき図式 D についての極限は普遍錐 $\lambda : c \stackrel{\cdot}{\to} D$ である．

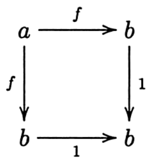
極限の定義のこのバリエーションは本質的に新しい情報を何も生み出さない．なぜなら，FG をグラフ G によって生成された自由圏とし，$P : G \to U(FG)$ を対応する普遍図式とすると，各図式 $D : G \to UC$ が（一意的な）函手 $D' : FG \to C$ について一意的に $D = UD' \circ P$ と書けて，D' についての極限（と極限錐）がちょうど D についてのそれらと対応することが直ちにわかるからである．

演習問題

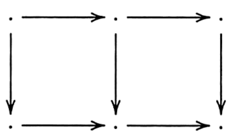
1. **Set** において $f : X \to Z$ と $g : Y \to Z$ の引き戻しは，対の集合 $\{\langle x, y\rangle \mid x \in X,\ y \in Y,\ fx = gy\}$ によって与えられることを示せ．**Top** における引き戻しを

記述せよ.

2. 添字集合 J 上の通常のカルテシアン積とその射影は, **Set** や **Top** における（圏論的な）積であることを示せ.
3. 圏 J が始対象 s を持つとき, 任意の圏 C へのすべての函手 $F: J \to C$ が極限を持ち, それはすなわち $F(s)$ であることを証明せよ. これを双対化せよ.
4. 任意の圏において, $f: a \to b$ がエピであることと次の正方図式が押し出しであることが互いに従うことを証明せよ.



5. 引き戻し正方図式 (8) において, f がモニックならば g もモニックであることを示せ.
6. **Set** においては, $f: X \to Y$ の核対が同値関係 $E = \{\langle x, x' \rangle \mid x, x' \in X$ かつ $fx = fx'\}$ と適切な写像 $E \rightrightarrows X$ により与えられることを示せ.
7. （積とイコライザで核対を表す）. C が有限積とイコライザを持つとき, $f: a \to b$ の核対は射影 $p_1, p_2: a \times a \to a$ により, e を fp_1, $fp_2: a \times a \to b$ のイコライザとして $p_1 e$, $p_2 e$ と表現できることを示せ（演習問題 6 を参照）. これを双対化せよ.
8. 次の可換図式を考える.



(a) 両方の正方図式が引き戻しであるとき, 外側の四角図式（上と下の辺は自明な合成）が引き戻しであることを証明せよ.

(b) 外側の四角図式と右側の正方図式が引き戻しであるとき, 左側の正方図式もそうである.

9. （積と引き戻しでイコライザを表す）. $f, g: b \to a$ のイコライザは

$$(1_b, f): b \to b \times a \leftarrow b: (1_b, g)$$

の引き戻しとして構成できることを示せ.

10. C が引き戻しと終対象を持つとき, C がすべての有限積とイコライザを持つことを証明せよ.

5 有限積を持つ圏

圏 C の任意有限個の対象 $c_1, \ldots, c_n$ について，積対象 $c_1 \times \cdots \times c_n$ と n 個の射影 $p_i : c_1 \times \cdots \times c_n \to c_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ からなり通常の普遍性を持つ積図式が存在するとき，C は**有限積を持つ**と言われる．このとき特に C は任意の二つの対象の積と同時に対象なしの積を持ち，これは単に C の終対象 t と呼ばれる．**対角射** (diagonal map) $\delta_c : c \to c \times c$ は各 c について $p_1\delta_c = 1_c = p_2\delta_c$ により定義される．これは自然変換である．

命題 1 圏 C が終対象 t を持ち，任意の二つの対象について積図式 $a \leftarrow a \times b \to b$ を持つとき，C はすべての有限積を持つ．積対象は $\langle a, b\rangle \mapsto a \times b$ により双函手 $C \times C \to C$ を与える．任意の三つの対象 a, b, c について同型

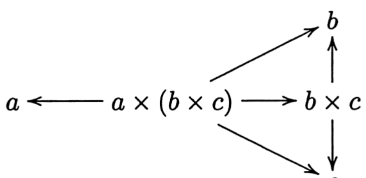
$$\alpha = \alpha_{a,b,c} : a \times (b \times c) \cong (a \times b) \times c \tag{1}$$

が存在し，a, b, c において自然である．任意の対象 a について同型

$$\lambda = \lambda_a : t \times a \cong a, \qquad \varrho = \varrho_a : a \times t \cong a \tag{2}$$

が存在し，a において自然である．ここで t は C の終対象である．

証明 一つの対象 c の積は単に c の恒等射からなる図式 $c \to c$ であり，任意の圏で存在する．ここで C の任意の二つの対象 a_1, a_2 が積を持つと仮定しよう．対象の各対についてそのような積図式 $a_1 \leftarrow a_1 \times a_2 \to a_2$ を一つ選ぶと，射 f_i について $f_1 \times f_2$ が $p_i(f_1 \times f_2) = f_ip_i$ により定義されているとき $\times$ は函手になる．このとき，図式



のような射影を持つ繰り返された積対象 $a \times (b \times c)$ を形作ることにより，三つの対象 a, b, c の積を形作ることができる．a への射影と二つの図示された

合成射は $a \times (b \times c)$ から a, b, c それぞれへの三つの射を与える．(二つの因子から）与えられた射影の普遍性により，これら三つの射が a, b, c についての積図式を形作ることが直ちに従う．さらに多くの因子についての積図式も全く同様に繰り返しにより見出すことができる．三つの因子については $(a \times b) \times c$ という繰り返しによって積図式を形作ることもできる．このとき積対象の一意性は一意的な同型 $a \times (b \times c) \cong (a \times b) \times c$ を生み出し，与えられた a, b, c への射影と可換になる．これは命題の同型 α であり，かつ自然である．最後に，すべての対象は終対象 t への一意的な射を持つので，図式 $t \leftarrow a \xrightarrow{1} a$ は t と a についての積図式である．このとき積対象 $t \times a$ の一意性は同型 $\lambda_a : t \times a \to a$ を生み出し，$\varrho_a : a \times t \to a$ についても同様である．さらに λ と ϱ の自然性が従う．こうして構成されるこれらの同型 α, λ, ϱ は「**カノニカル** (canonical)」であると言われる． □

双対な結果が有限余積について成り立つ．特に因子を持たない余積は始対象である．m 個の対象 a_j について，余積図式は m 個の入射 $i_j : a_j \to a_1 \amalg \cdots \amalg a_m$ からなり，どの射 $f : a_1 \amalg \cdots \amalg a_m \to c$ も m 個の**ココンポーネント** (cocomponent)$f \circ i_j = f_j : a_j \to c (j = 1, \ldots, m)$ により一意的に決定される．特に，C が有限積と有限余積の両方を持つとき，余積から積への射

$$a_1 \amalg \cdots \amalg a_m \to b_1 \times \cdots \times b_n$$

は，射 $f_{jk} = p_k f i_j : a_j \to b_k \ (j = 1, \ldots, m, k = 1, \ldots, n)$ からなる $m \times n$ 行列によって一意的に決定される．有限次元ベクトル空間からなる圏では有限余積と有限積が一致するが，そこではこの行列はちょうど通常の線型変換の行列であり，ドメインとコドメインに与えられた基底について相対的である．

より一般的に，C をヌル対象 z（始対象であり終対象である対象 z）を持つ任意の圏とする．z を通る射 $a \to z \to b$ は**ゼロ射** $0 : a \to b$ である．C が有限積と有限余積も持つとき，余積から積への「カノニカル」な射

$$a_1 \amalg \cdots \amalg a_n \to a_1 \times \cdots \times a_n$$

すなわち，単位 $n \times n$ 行列（対角線に恒等射，それ以外にゼロ射）を持つ射が存在する．このカノニカルな射は同型かもしれないし（**Ab** や R-**Mod**），

同型でないモニック射かもしれないし（$\mathbf{Top}_*$ や $\mathbf{Set}_*$），同型でないエピ射かもしれない ($\mathbf{Grp}$).

演習問題

1. 対角射 $\delta_c : c \to c \times c$ は c において自然であることを証明せよ.
2. 有限積を持つ任意の圏において，(1) と (2) のカノニカルな射 α, ϱ, λ を含む次の図式は常に可換であることを証明せよ.

$$\begin{array}{ccccc} a \times (b \times (c \times d)) & \xrightarrow{\alpha} & (a \times b) \times (c \times d) & \xrightarrow{\alpha} & ((a \times b) \times c) \times d \\ \downarrow{\scriptstyle 1\times\alpha} & & & & \uparrow{\scriptstyle \alpha\times 1} \\ a \times ((b \times c) \times d) & & \xrightarrow{\alpha} & & (a \times (b \times c)) \times d \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} t \times (b \times c) & \xrightarrow{\alpha} & (t \times b) \times c \\ \downarrow{\scriptstyle \lambda} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda\times 1} \\ b \times c & = & b \times c \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} a \times (t \times c) & \xrightarrow{\alpha} & (a \times t) \times c \\ \downarrow{\scriptstyle 1\times\lambda} & & \downarrow{\scriptstyle \varrho\times 1} \\ a \times c & = & a \times c \end{array}$$

3. (a) $\mathbf{Cat}$ が引き戻しを持つことを証明せよ（第 II 章第 6 節演習問題 5 を参照）.
   (b) コンマ圏 $(b \downarrow C)$ と $(C \downarrow a)$ が $\mathbf{Cat}$ における引き戻しであることを示せ.
4. $\mathbf{Cat}$ がすべての小さな余積を持つことを証明せよ.
5. B が（有限）積を持つとき，任意の函手圏 B^C も（「各点的に」計算される）（有限）積を持つことを示せ.

6 圏の中の群

代数的恒等式を図式で表現することについて序章で述べたアイデアに戻ろう．C を有限積と終対象 t を持つ圏とする．このとき C におけるモノイド (monoid) とは三つ組 $\langle c, \mu : c \times c \to c, \eta : t \to c \rangle$ で次の図式を可換にするものである.

$$\begin{array}{ccccc} c \times (c \times c) & \xrightarrow{\alpha} & (c \times c) \times c & \xrightarrow{\mu\times 1} & c \times c \\ \downarrow{\scriptstyle 1\times\mu} & & & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ c \times c & & \xrightarrow{\mu} & & c \end{array} \qquad (1)$$

$$\begin{array}{ccccc} t\times c & \xrightarrow{\eta\times 1} & c\times c & \xleftarrow{1\times\eta} & c\times t \\ {\scriptstyle\lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mu} & & \downarrow{\scriptstyle\varrho} \\ c & = & c & = & c \end{array} \tag{2}$$

(これは，第 5 節 (1) の結合律同型 α が最初の図式で明示的に使用されていることを除けば，ちょうど序章での定義である.) ここで C における**群** (group) を，モノイド $\langle c,\mu,\eta\rangle$ で次の（対角射 δ_c を含む）図式

$$\begin{array}{ccccc} c & \xrightarrow{\delta_c} & c\times c & \xrightarrow{1\times\zeta} & c\times c \\ \downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle\mu} \\ t & & \xrightarrow{\quad\eta\quad} & & c \end{array} \tag{3}$$

を可換にする射 $\zeta : c\to c$ を持つものと定義する（これは ζ が各 $x\in c$ を右逆元に写すことを示唆している）.

同様の図式によって，C における環，C における束，等々を定義することができる．この過程は，演算とそれらの間の恒等式によって定義される任意の型の代数系に適用できる．

G が（普通の）群であるとき，任意の X について関数集合 G^X も群であるという事実はよく知られている．実際 G^X における二つの関数 f, f' の積は $(f\cdot f')(x)=fx\cdot f'x$ として各点的に定義される．いまの文脈ではこの構成は次の形式を取る．

命題 1　C が有限積を持つ圏であるとき，対象 c が C における群（またはモノイド）であることと hom 函手 $C(-,c)$ が函手圏 $\mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$ における群（またはモノイド）であることは互いに従う．

証明　c についての各乗法 μ は hom 集合 $C(-,c):C^{\mathrm{op}}\to\mathbf{Set}$ についての対応する乗法 $\overline{\mu}$ を，合成射

$$C(-,c)\times C(-,c)\xrightarrow{\theta}C(-,c\times c)\xrightarrow{\nu}C(-,c)$$

として決定する．ここで $\nu=\mu_*=C(-,\mu)$ であり，最初の自然同型は積対象 $c\times c$ の定義（第 4 節 (4) を参照）により与えられるものである．逆に任意

の自然な ν が上のように与えられたとき，米田の補題により $\nu = \mu_*$ を満たす一意的な $\mu : c \times c \to c$ が存在することが証明される.「図式追跡 (diagram chase)」により，μ が結合的であることと $\overline{\mu}$ が結合的であることは互いに従うことが示される．追跡では，三項の積の射影との可換性のところで結合律同型 α の定義を用いる．証明の残りは演習問題に残しておく． □

函手圏 $\mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$ は常に有限積を持つ（第 5 節演習問題 5）ので，たとえ圏 C が有限積を持たなくても $C(-, c)$ がこの函手圏における群となるような C の対象 c を考えることができる．しかしながら，この付加的な一般性を実際に用いる場面を私は知らない．

演習問題

（以下において C は有限積と終対象 t を持つ圏とする.）

1. C におけるモノイドからなる圏を記述し，それが有限積を持つことを示せ.
2. C における群からなる圏が有限積を持つことを示せ.
3. 函手 $T : B \to \mathbf{Set}$ が $\mathbf{Set}^B$ における群であることと，B の対象 b について各 Tb が（普通の）群であり B の射 f について各 Tf が群のモルフィズムであることが互いに従うことを示せ.
4. (a) A が（**Set** における）アーベル群であるとき，その乗法 $A \times A \to A$，単位元 $1 \to A$，逆 $A \to A$ がすべて群のモルフィズムであることを示せ（ここで $A \times A$ は直積群と見なす）．これらの構造射 (structure map) を持つ A は **Grp** における群であることを導け.
   (b) **Grp** におけるすべての群がこの形になることを証明せよ.

7　表現可能函手の余極限

表現可能函手 $\hom(d, -)$ の有用性は，集合値函手についての以下の基本的な結果により強調される.

定理 1 小さな圏 D から集合の圏への任意の函手 $K : D \to \mathbf{Set}$ は，D の対象 d についての表現可能函手 $\hom(d, -)$ からなる図式の余極限として（カノニカルな方法で）表すことができる.

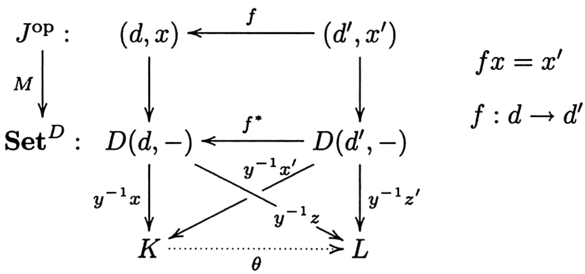
証明　まず，K が与えられたとき，(余極限に) 必要な図式圏 J を K のいわゆる「要素の圏 (category of elements)」として構成する．すなわち，コンマ圏 $1 \downarrow K$ （第 II 章第 6 節 (3) を見られたい[8]）で，$d \in D$ とそれについての要素 $x \in K(d)$ からなる対 (d, x) を対象とし，$K(f)x = x'$ （より簡略に $fx = x'$ と書く）を満たす D の射 $f : d \to d'$ を射 $f : (d, x) \to (d', x')$ とする．このとき，与えられた函手 K が，各対象 (d, x) を hom 函手 $D(d, -)$ に写し各射 f を誘導された自然変換 $f^* : D(d', -) \to D(d, -)$ に写す［反変］函手

$$M : J^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}^D$$

により与えられる $1 \downarrow K$ 上の図式の余極限であることを主張する．このとき米田同型

$$y^{-1} : K(d) \to \mathrm{Nat}(D(d, -), K)$$

は，以下の図の左下にある K への射で示されているように，$\mathbf{Set}^D$ における底 M 上の K への錐を生み出す．



(1)

この K への錐が $D(d, -)$ 上の余極限錐であることを主張する．まず，$D(d, -)$ から頂点 L つまりある函手 $L : D \to \mathbf{Set}$ へ向かう他の任意の錐を考える．この錐の射（$\mathbf{Set}^D$ の射）は自然変換 $D(d, -) \dot{\to} L$ であり，ゆえに米田の補題によりある $z \in L(d)$ について $y^{-1}z : D(d, -) \dot{\to} L$ という形で与えられ，同じく得られる $y^{-1}z' : D(d', -) \dot{\to} L$ について（錐なので）$z' = fz$ が成り立つ．

この頂点 K への錐が普遍的であることを示すために，最初の錐を二番目の錐に移す一意的な自然変換 $\theta : K \dot{\to} L$ を構成しなければならない．そこで各

[8]［訳注］1 は $\mathbf{Set}$ の終対象すなわち一点集合である．

$x \in K(d)$ について，図式 (1) の上部にあるように J^{op} の対象 (d, x) から始め，L についての錐における自然変換 $y^{-1}z$ にある $z \in L(d)$ について

$$\theta_d x = z$$

とおく．θ が自然であることを示すために，$fx = x'$ を満たす任意の $f : d \to d'$ を考える．このとき $fz = z'$ でもあり，また y^{-1} が自然であるので $f^* \cdot y^{-1}z = y^{-1}(fz) = y^{-1}z'$ である．それゆえ θ は自然である．一意性は自明である．□

双対的な議論により，任意の反変函手 $D^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ が表現可能反変函手 $\hom(-, d)$ の図式の余極限として表現できることが示される．

小さな圏 C についての反変函手 $F : C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ はしばしば**前層** (presheaf) と呼ばれる．その直観は，C がある位相空間の開集合 U からなる圏であり，$F(U)$ が U 上で定義された（ある意味で）滑らかな関数であり，包含 $V \subset U$ が U 上の関数を V 上の関数に制限する写像 $F(U) \to F(V)$ を与える場合からきている．すべてのこのような函手（前層）からなる函手圏 $\mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$ はしばしば $\widehat{C}$ と書かれる．これらの函手のあるもの（「重なりが合致する」性質を持つもの）は層 (sheaf) と呼ばれる．Mac Lane-Moerdijk [1992] を見られたい．

注釈

米田の補題は日本人の先駆者である米田信夫の仕事に早くから現れ（マックレーンとの個人的交流）[1954]，時が経つにつれてその重要性は増している．

表現可能函手はおそらく，コホモロジー作用素の普遍的な例のような「普遍的な例」の形で位相幾何学において最初に現れた（たとえば，J.-P. セールが 1953 年に行ったアイレンバーグ–マックレーン空間の（2 を法とする）コホモロジーの計算において）．

普遍射は同型を除いてのみ一意的である．この絶対的一意性の欠如がおそらくはこの概念がゆっくりと発展してきた理由である．例はずっとあった．普遍射の一般的概念を実際に定式化するという大胆なステップは 1948 年に Samuel によって踏み出された．そしてその一般的概念はブルバキによってふんだんに使われ広まった．普通のカルテシアン積がその射影の普遍性により記述できるというアイデアが，それとほぼ同時に定式化された (Mac Lane [1948, 1950])．他方，極限と余極限の概念は様々な具体例において長い歴史を持っている．たとえば余極限は，無限アーベル群がその有

限生成部分群の合併として表現されている定理の証明において用いられていた．（順序集合上の）極限はヘンゼルの p 進数や，ポントリャーギンにより形式化されたような極限過程によるチェックホモロジーやコホモロジーの構成において現れる．こういった極限に現れる自然同型の適切な取り扱いが，アイレンバーグ–マックレーンによる圏論についての最初の論文 [1945] の主な動機であった．E. H. ムーアの一般解析学（1913 年頃）ではある有向集合上の極限を用いていた．これらの古典的な場合すべてにおいて，極限が現れたのは J が線形順序集合もしくは半順序集合である函手 $F : J \to C$ についてだけであった．それから Kan [1960] がすべての函手の極限を考えるというステップを踏み出し，Freyd [1964] が一般の場合に「極限」に代えて「ルート (root)」という言葉を用いた．彼に続いた人々は，元々の「極限」という言葉をこの一般的な意味に拡張することを選んだ．有向集合上の極限に固有の性質は第 IX 章で研究する．

第IV章　随伴

1　随伴

ここでカンによる基本的概念を示す．この概念は自由対象や他の普遍的構成の性質に従来とは違う定式化を与える．動機付けとしてまず，基底 X を持つベクトル空間 V_X の構成（第 III 章第 1 節）を再度調べてみよう．固定された体 K について，函手

$$\mathbf{Set} \underset{U}{\overset{V}{\rightleftarrows}} \mathbf{Vct}_K$$

を考えてみる．ここで各ベクトル空間 W について $U(W)$ は W のすべてのベクトルからなる集合であり，U は忘却函手である．一方，任意の集合 X に対して，$V(X)$ は X を基底に持つベクトル空間である．ここで $V(X)$ のベクトルは，スカラー係数 $r_i \in K$，各 $x_i \in X$，および自明なベクトル演算による形式的有限線型結合 (formal finite linear combination) $\Sigma r_i x_i$ である．各関数 $g : X \to U(W)$ は，一意的な線型変換 $f : V(X) \to W$ に拡張される．これは $f(\Sigma r_i x_i) = \Sigma r_i (g x_i)$ によって明示的に与えられる（すなわち，$V(X)$ の形式的線型結合は W の実際の線型結合に写される）．この対応 $\psi : g \mapsto f$ は逆対応 $\varphi : f \mapsto f|X$，すなわち f の X への制限を持ち，それゆえ φ は全単射

$$\varphi : \mathbf{Vct}_K(V(X), W) \cong \mathbf{Set}(X, U(W))$$

である．この全単射 $\varphi = \varphi_{X,W}$ はすべての集合 X とすべてのベクトル空間 W について「同じ方法で」定義される．このことは上記の両辺を X と W

の函手と見なせば $\varphi_{X,W}$ は自然変換 φ のコンポーネントであることを意味する．[φ が自然変換であることは] X と W における自然性を別々に確かめればわかる．X における自然性は，各射 $h : X' \to X$ について図式

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Vct}_K(V(X), W) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{Set}(X, U(W)) \\ \downarrow{\scriptstyle (Vh)^*} & & \downarrow{\scriptstyle h^*} \\ \mathbf{Vct}_K(V(X'), W) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{Set}(X', U(W)) \end{array}$$

が可換となることを意味する．ただし $h^*g = g \circ h$ である．この可換性は φ の定義から簡単な計算によって得られる．W における自然性も同様である．

次にいくつかの同様な例に注目しよう．

与えられた（小さな）グラフ G 上の自由圏 $C = FG$ [を取ること] は函手 $\mathbf{Grph} \to \mathbf{Cat}$ となる．各グラフのモルフィズム $D : G \to UB$ が圏の一意的なマップ $D' : FG \to B$ に拡張されるという事実（第 II 章第 7 節）により，この函手は忘却函手 $U : \mathbf{Cat} \to \mathbf{Grph}$ と関係付けられる．しかも，$D \mapsto D'$ は自然同型

$$\mathbf{Cat}(FG, B) \cong \mathbf{Grph}(G, UB)$$

である．

小さな集合からなる圏において，二変数の各関数 $g : S \times T \to R$ は，（T 上の）二番目の変数についての関数を値とする（S 上の）一変数の関数 $\varphi g : S \to \hom(T, R)$ として扱うことができる．明示的に書けば，$s \in S$, $t \in T$ について $[(\varphi g)s]t = g(s, t)$ である．これは φ を全単射

$$\hom(S \times T, R) \cong \hom(S, \hom(T, R))$$

として記述している．これは S, T および R において自然である．集合 T を固定しておいて関数 $F, G : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ を $F(S) = S \times T$, $G(R) = \hom(T, R)$ により定義すれば，この全単射は S と R において自然な

$$\hom(F(S), R) \cong \hom(S, G(R))$$

という形を取り，先の例と全く同様になる．

可換環 K の上の加群 A, B, C についても，三つの引数すべてにおいて自

然な似たような同型

$$\hom(A \otimes_K B, C) \cong \hom(A, \hom_K(B, C))$$

が存在する．

定義 1 A と X を圏とする．X から A への**随伴** (adjunction) とは次の条件を満たすような三つ組 $\langle F, G, \varphi \rangle : X \rightharpoonup A$ である[1]．ここで F と G は函手

$$X \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} A$$

であり，φ は対象 $x \in X$ と $a \in A$ による各組に集合間の全単射

$$\varphi = \varphi_{x,a} : A(Fx, a) \cong X(x, Ga) \tag{1}$$

で x と a において自然なものを割り当てる関数である．

ここで左辺 $A(Fx, a)$ は，対象からなる各組 $\langle x, a \rangle$ を hom 集合 $A(Fx, a)$ に写す双函手

$$X^{\mathrm{op}} \times A \xrightarrow{F^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Id}} A^{\mathrm{op}} \times A \xrightarrow{\hom} \mathbf{Set}$$

であり，右辺も同様の双函手 $X^{\mathrm{op}} \times A \to \mathbf{Set}$ である．それゆえ全単射 φ の自然性は，すべての $k : a \to a'$ と $h : x' \to x$ について

$$\begin{array}{ccc} A(Fx, a) & \xrightarrow{\varphi} & X(x, Ga) \\ {\scriptstyle k_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (Gk)_*} \\ A(Fx, a') & \xrightarrow{\varphi} & X(x, Ga') \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A(Fx, a) & \xrightarrow{\varphi} & X(x, Ga) \\ {\scriptstyle (Fh)^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h^*} \\ A(Fx', a) & \xrightarrow{\varphi} & X(x', Ga) \end{array} \tag{2}$$

の両図式が可換になることを意味する．ここで k_* は k との合成の演算 $A(Fx, k)$ の省略形であり，また $h^* = X(h, Ga)$ である．

ここでの議論は X と A のすべての hom 集合が小さいことを仮定している．もしそうでなければ，上記の **Set** を適当に大きな集合の圏 **Ens** に置き換えるだけでよい．

---

[1] ［訳注］いまではこの表記はあまり使われない．後述のように $F \dashv G$ と書くのが普通である．

随伴は hom 集合を使わず射を用いて直接記述することもできる．それは各射 $f : Fx \to a$ に f の**右随伴射** (right adjunct) と呼ばれる射 $\varphi f = \mathrm{rad} f : x \to Ga$ を割り当てる全単射で，すべての f とすべての射 $h : x' \to x$ および $k : a \to a'$ について (2) の自然性条件

$$\varphi(k \circ f) = Gk \circ \varphi f, \quad \varphi(f \circ Fh) = \varphi f \circ h \tag{3}$$

が成り立つようなものである．これは φ^{-1} が自然であること，すなわちすべての h, k および $g : x \to Ga$ について

$$\varphi^{-1}(g \circ h) = \varphi^{-1} g \circ Fh, \quad \varphi^{-1}(Gk \circ g) = k \circ \varphi^{-1} g \tag{4}$$

が成り立つことと同じことである．

このような随伴が与えられたとき，函手 F は G の**左随伴** (left-adjoint) と呼ばれ，一方で G は F の**右随伴** (right-adjoint) と呼ばれる．($F \dashv G$ と書く著者もいるし，F は G の「随伴」であり G は F の「余随伴」であると言う著者もいる一方で，それを逆に言う著者もいる．それゆえ我々は「左」および「右」随伴という術語に固定することにしよう．)

すべての随伴は普遍射を生み出す．具体的に，(1) において $a = Fx$ とする．このとき (1) の左側の hom 集合は恒等射 $1 : Fx \to Fx$ を含む．その射の φ による像を η_x と呼ぼう．第 III 章第 2 節の米田の命題 1 により，この η_x は $x \in X$ から G への普遍射

$$\eta_x : x \to GFx, \quad \eta_x = \varphi(1_{Fx})$$

となる．随伴はすべての対象 $x \in X$ についてこのような普遍射 η_x を与える．さらに，すべての図式

$$\begin{array}{ccc} x' & \xrightarrow{\eta_{x'}} & GFx' \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle GFh} \\ x & \xrightarrow{\eta_x} & GFx \end{array}$$

が可換なので，関数 $x \mapsto \eta_x$ は自然変換 $I_X \overset{\cdot}{\to} GF$ となる．このことは φ の自然性を記述する等式 (3) に基づいた計算

$$GFh \circ \varphi(1_{Fx'}) = \varphi(Fh \circ 1_{Fx'}) = \varphi(1_{Fx} \circ Fh) = \varphi(1_{Fx}) \circ h$$

によって証明される．この計算は可換図式

$$\begin{array}{ccccc} A(Fx', Fx') & \xrightarrow{(Fh)_*} & A(Fx', Fx) & \xleftarrow{(Fh)^*} & A(Fx, Fx) \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ X(x', GFx') & \xrightarrow[(GFh)_*]{} & X(x', GFx) & \xleftarrow[h^*]{} & X(x, GFx) \end{array}$$

によって視覚化することもできる．ここで $h^* = X(h, 1)$ かつ $h_* = X(1, h)$ である．

全単射 φ は射 η_x を用いて

$$f : Fx \to a \quad \text{について} \quad \varphi(f) = Gf \circ \eta_x \tag{5}$$

と表現することができる．実際，φ の自然性 (3) により

$$\varphi(f) = \varphi(f \circ 1_{Fx}) = Gf \circ \varphi(1_{Fx}) = Gf \circ \eta_x$$

を計算することができる．この計算は可換な正方図式

$$\begin{array}{ccc} A(Fx, Fx) & \xrightarrow{\varphi} & X(x, GFx) \\ \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle (Gf)_*} \\ A(Fx, a) & \xrightarrow{\varphi} & X(x, Ga) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & \longmapsto & \eta_x \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ f \circ 1 & \longmapsto & \varphi f = Gf \circ \eta_x \end{array}$$

に沿って 1 を追跡することにより視覚化できる．

双対的に，随伴は F からの普遍射を与える．実際，随伴 (1) において $x = Ga$ とおく．このとき右辺の hom 集合には恒等射 $1 : Ga \to Ga$ がある．この射の φ^{-1} による像は ε_a と呼ばれて

$$\varepsilon_a : FGa \to a, \quad \varepsilon_a = \varphi^{-1}(1_{Ga}), \quad a \in A$$

となり，これは F から a への普遍射となる．前と同様に ε は自然変換 $\varepsilon : FG \dot{\to} I_A$ であり，

$$g : x \to Ga \quad \text{について} \quad \varphi^{-1}(g) = \varepsilon_a \circ Fg$$

となる．最後に，$x = Ga$ とおいてみる．このとき，φ についての式 (5) によ

り，$\varepsilon_a = \varphi^{-1}(1_{Ga})$ から

$$1_{Ga} = \varphi(\varepsilon_a) = G(\varepsilon_a) \circ \eta_{Ga}$$

が得られる．これは合成された自然変換

$$G \xrightarrow{\eta G} GFG \xrightarrow{G\varepsilon} G$$

が恒等変換になることを主張している．

まとめると次の定理が証明された．

定理 1 随伴 $\langle F, G, \varphi \rangle : X \rightharpoonup A$ は以下のものを決定する．

(i) 各対象 x について射 η_x が x から G への普遍射であり，各 $f : Fx \to a$ の右随伴射が

$$\varphi f = Gf \circ \eta_x : x \to Ga \tag{6}$$

であるような自然変換 $\eta : I_X \dot{\to} GF$.

(ii) 各射 ε_a が F から a への普遍射であり，各 $g : x \to Ga$ が左随伴射

$$\varphi^{-1} g = \varepsilon_a \circ Fg : Fx \to a \tag{7}$$

を持つような自然変換 $\varepsilon : FG \dot{\to} I_A$.

さらに，次の両方の合成は（それぞれ G および F の）恒等変換である．

$$G \xrightarrow{\eta G} GFG \xrightarrow{G\varepsilon} G, \quad F \xrightarrow{F\eta} FGF \xrightarrow{\varepsilon F} F. \tag{8}$$

η を随伴の**単位元** (unit) と呼び，ε を**余単位元** (counit) と呼ぶ[2]．(かつては η を「前随伴」と呼び，ε を「後随伴」と呼んでいた.)

与えられた随伴は，実際には次の意味で，これらすべてのデータの様々な一部によって既に決定されている．

定理 2 各随伴 $\langle F, G, \varphi \rangle : X \rightharpoonup A$ は次のリストのどれか一つにあるものにより完全に決定される．

---

[2] ［訳注］これらを単位元および余単位元と呼ぶのは，第 VI 章で随伴からモナドとコモナドを定義したときに，ちょうどモナドの単位元とコモナドの余単位元になるからである．

(i) 函手 F, G および各 $\eta_x : x \to GFx$ が x から G への普遍射となるような自然変換 $\eta : I_X \dot{\to} GF$．このとき φ は (6) によって定義される．

(ii) 函手 $G : A \to X$ および各 $x \in X$ について対象 $F_0 x \in A$ と x から G への普遍射 $\eta_x : x \to GF_0 x$．このとき函手 F は対象関数 F_0 を持ち，射 $h : x \to x'$ において $GFh \circ \eta_x = \eta_{x'} \circ h$ により定義される．

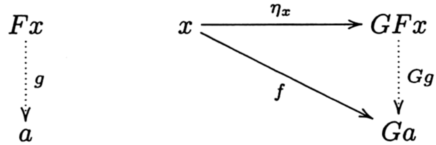
(iii) 函手 F, G および各 $\varepsilon_a : FGa \to a$ が F から a への普遍射となるような自然変換 $\varepsilon : FG \dot{\to} I_A$．ここで φ^{-1} は (7) によって定義される．

(iv) 函手 $F : X \to A$ および各 $a \in A$ について対象 $G_0 a \in X$ と F から a への普遍射 $\varepsilon_a : FG_0 a \to a$.

(v) 函手 F, G および自然変換 $\eta : I_X \dot{\to} GF$ と $\varepsilon : FG \dot{\to} I_A$ で (8) における両方の合成が恒等変換になるもの．ここで φ は (6) により，φ^{-1} は (7) により定義される．

(v) のため，随伴 $\langle F, G, \varphi \rangle$ はしばしば $\langle F, G, \eta, \varepsilon \rangle : X \rightharpoonup A$ と表示される．

証明　(i) について．η_x が普遍的であるという言明は，各 $f : x \to Ga$ に対して次の可換図式を満たすちょうど一つの射 g が存在することを意味する．



これはちょうど $\theta(g) = Gg \circ \eta_x$ が全単射

$$\theta : A(Fx, a) \to X(x, Ga)$$

を定義することを述べている．この全単射 θ は，η が自然なので x において自然であり，G が函手なので a において自然である．よって θ は随伴 $\langle F, G, \theta \rangle$ を与える．η が随伴 $\langle F, G, \varphi \rangle$ から得られる単位元の場合，$\theta = \varphi$ となる．

データ (ii) は (i) に展開できるので，それにより随伴が決定される．(ii) においては単にすべての対象 $x \in X$ について普遍射 $\langle F_0 x, \eta_x \rangle$ が与えられている．そこで，F_0 を $\eta : I_X \dot{\to} GF$ が自然になるようなある函手 F の対象関数にする方法がちょうど一つあることを示そう．具体的に言うと，各 $h : x \to x'$

について η_x の普遍性は，次の図式を可換にできる射（点線）がちょうど一つあることを述べている．

$$\begin{array}{ccccc} F_0x & \qquad & x & \xrightarrow{\eta_x} & GF_0x \\ \vdots & & \downarrow h & & \vdots \\ F_0x' & & x' & \xrightarrow{\eta_{x'}} & GF_0x' \end{array}$$

この射を $Fh : F_0x \to F_0x'$ として選んでみよう．このとき可換性は η が自然であることを述べており，この Fh の選択が F を函手にすることは容易に確かめられる．

(iii) 部分と (iv) 部分の証明は上記の双対である．

(v) 部分を証明するために，η と ε を用いて関数

$$A(Fx, a) \underset{\theta}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} X(x, Ga)$$

を，各 $f : Fx \to a$ について $\varphi f = Gf \circ \eta_x$ とし，各 $g : x \to Ga$ について $\theta g = \varepsilon_a \circ Fg$ とすることによって定義する．このとき G は函手であり η は自然変換であるので，

$$\varphi\theta g = G\varepsilon_a \circ GFg \circ \eta_x = G\varepsilon_a \circ \eta_{Ga} \circ g$$

が成り立つ．しかし仮定 (8) は $G\varepsilon_a \circ \eta_{Ga} = 1$ と述べている．よって $\varphi\theta = \mathrm{id}$ となる．双対的に $\theta\varphi = \mathrm{id}$ も成り立つ．それゆえ φ は（θ を逆写像とする）全単射である．これは明らかに自然であり，よって随伴である（そして，ある随伴からこの議論を始めたとすると，φ はその議論を始めたもとの随伴になる）． □

この定理は大変便利である．たとえば，与えられた圏のすべての対象からの（あるいはすべての対象への）普遍射が存在するのならば，部分 (ii) および (iv) からある随伴が作られる．たとえば，圏 C に対して，各組 $\langle a, b\rangle \in C \times C$ に対して $\Delta : C \to C \times C$ から $\langle a, b\rangle$ への普遍射が存在するとき，C は有限積を持つ．この上記の定理により，積対象を与える関数 $\langle a, b\rangle \mapsto a \times b$ は実際には函手 $C \times C \to C$ になり，この函手は対角函手 Δ の右随伴になる．つまり，

$$\varphi : (C \times C)(\Delta c, \langle a, b\rangle) \cong C(c, a \times b)$$

が作れる．$C \times C$ の射の定義を用いれば，これは

$$\varphi : C(c, a) \times C(c, b) \cong C(c, a \times b)$$

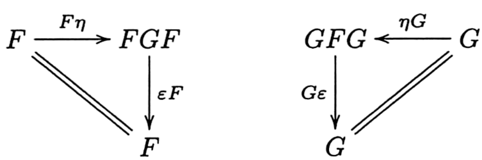
になる．(右辺において $c = a \times b$ とすれば) この随伴の余単位元は射 $\langle a \times b, a \times b\rangle \to \langle a, b\rangle$ である．すなわち，それは射の組 $a \leftarrow a \times b \to b$，つまり，積の射影 $p : a \times b \to a$ と $q : a \times b \to b$ に他ならない．随伴 φ^{-1} は各 $f : c \to a \times b$ を組 $\langle pf, qf\rangle$ に写す．また，これによって φ が余単位元 ε から定まる．

同様に，圏 C が余積 $\langle a, b\rangle \mapsto a \amalg b$ を持つとき，これらから Δ の左随伴となるような余積函手 $C \times C \to C$ が定義される．つまり

$$C(a \amalg b, c) \cong (C \times C)(\langle a, b\rangle, \Delta c)$$

が得られる．極限に対するその他のすべての例は（それらが常に存在するときは）随伴の例として同様に導かれる．さらに多くの応用において，普遍性を証明することは随伴が与えられることを証明することの近道であることがわかる．

一方では，定理の部分 (v) は，ある随伴を，その随伴の単位元と余単位元における二つの簡単な恒等変換



(9)

によって表す．これらの**三角恒等図式** (triangular identity) は圏 A および X の対象を明示的に用いておらず，扱いやすい．すぐ後でわかるように，これは随伴の性質について議論する際に便利である．(何人かの著者は，これらの恒等図式により η が ε の「擬逆 (quasi-inverse)」になる，という言い方をする．)

系 3 函手 $G : A \to X$ の二つの左随伴 F と F' は自然同型である．

この証明のためには，普遍射は，始対象と同様，同型を除いて等しいという事実を応用しさえすればよい．明らかに，随伴 $\langle F, G, \varphi\rangle$ と $\langle F', G, \varphi'\rangle$ は各 x に対して二つの普遍射 $x \to GFx$ および $x \to GF'x$ を与える．よって，一意的な同型射 $\theta_x : Fx \to F'x$ が存在して $G\theta_x \circ \eta_x = \eta'_x$ を満たす．さらに $\theta : F \dot{\to} F'$ が自然であることは容易に示せる．

系 4 函手 $G : A \to X$ が左随伴函手を持つとき，かつそのときに限り，各 $x \in X$ に対して，函手 $X(x, Ga)$ は $a \in A$ についての函手として表現可能である．もし $\varphi : A(F_0x, a) \cong X(x, Ga)$ がこの函手の表現ならば，F_0 は G の左随伴の対象関数となり，それによって全単射 φ は a において自然となり，随伴が得られる．

これは定理の部分 (ii) の言い換えに過ぎない．同じことだが，G が左随伴を持つとき，かつそのときに限り，すべての $x \in X$ から G への普遍射が存在する．

これらの双対命題に関しては読者に委ねる．

加法的函手の随伴は加法的である．

定理 5 Ab-圏 A と M の間の加法的函手 $G : A \to M$ が左随伴 $F : M \to A$ を持つとき，F は加法的となり随伴の全単射

$$\varphi : A(Fm, a) \cong M(m, Ga)$$

は（すべての $m \in M$, $a \in A$ に対して）アーベル群の同型となる．

証明　$\eta : I \dot{\to} GF$ が随伴の単位元ならば，φ は任意の $f : Fm \to a$ に対し $\varphi f = Gf \circ \eta_m$ として書き表すことができる．またもしも $f' : Fm \to a$ ならば，G の加法性から

$$\begin{aligned}\varphi(f + f') &= G(f + f')\eta_m = (Gf + Gf')\eta_m \\ &= Gf \circ \eta_m + Gf' \circ \eta_m = \varphi f + \varphi f'\end{aligned}$$

が成り立つ．よって φ はアーベル群の準同型である．次に M において $g, g' : m \to n$ を取る．η は自然だから，

$$GF(g+g')\circ\eta_m = \eta_n(g+g') = \eta_n g + \eta_n g'$$

となる．一方，G は加法的なので，

$$\begin{aligned} G(Fg+Fg')\circ\eta_m &= (GFg+GFg')\eta_m \\ &= GFg\circ\eta_m + GFg'\circ\eta_m = \eta_n g + \eta_n g' \end{aligned}$$

が成り立つ．これら二つの結果による同等性と η_m の普遍性から $F(g+g') = Fg + Fg'$ が成り立つ．よって F は加法的である． □

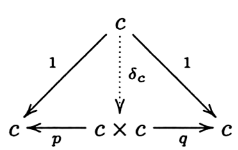
双対的に，加法的函手の任意の右随伴は加法的である．

演習問題

1. 定理 2 に以下の場合（とその双対）を加えられることを示せ．
   (vi) 函手 $G : A \to X$ および各 $x \in X$ に対する函手 $X(x, G-) : A \to \mathbf{Set}$ の表現 φ_x．
2. (Lawvere). 函手 $G : A \to X$ と $F : X \to A$ が与えられたとき，各随伴 $\langle F, G, \varphi\rangle$ は以下の図式

$$\begin{array}{ccc} \theta:\ (F\downarrow I_A) & \cong & (I_X\downarrow G) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ X\times A & = & X\times A \end{array}$$

   が可換になるようなコンマ圏どうしの同型 θ として表せることを示せ．ここで垂直方向のマップはコンポーネントを第 II 章第 6 節の図式 (5) の射影関数 P および Q に持つ．
3. 随伴 $\langle\Delta, \times, \varphi\rangle$ —— 対角函手に対する積による右随伴 —— に対して，各対象 $c \in C$ に対する単位元 $\delta_c : c \to c\times c$ が図式



   を可換にするような一意的な射となることを示せ．（この射 δ_c はしばしば c の**対角射** (diagonal arrow) と呼ばれる．）もし $C = \mathbf{Set}$ ならば，$x \in C$ に対して $\delta_c x = \langle x, x\rangle$ であることを示せ．
4. (Paré). 函手 $G : A \to X$ および $K : X \to A$ と自然変換 $\varepsilon : KG \dot{\to} \mathrm{id}_A$ および $\varrho : \mathrm{id}_X \dot{\to} GK$ で $G\varepsilon\cdot\varrho G = 1_G : G \dot{\to} GKG \dot{\to} G$ が成り立つものが与え

られたとする．このとき，$\varepsilon K \cdot K\varrho : K \dot{\to} K$ が A^X における冪等射となり，さらに，G が左随伴を持つことの必要十分条件はこの冪等射が分裂することであることを示せ．明確に述べると，もし $\varepsilon K \cdot K\varrho$ が $\beta \cdot \alpha = 1$ を満たす $\beta : K \dot{\to} F$ によって $\alpha \cdot \beta$ のように分裂すれば，F は単位元として $G\beta \cdot \varrho$ を持ち余単位元として $\varepsilon \cdot \alpha G$ を持つ G の左随伴となる．

2　随伴の例

ここで，様々な随伴の例をまとめてみよう．まず，定型的な忘却函手に対する左随伴の表を使って議論を始める．

忘却函手	左随伴 F	随伴の単位元
$U : R$-**Mod** $\to$ **Set**	$X \mapsto FX$ 自由 R-加群，基底 X	$j : X \to UFX$ 「生成元の挿入」 （III.1 を参照）
$U :$ **Cat** $\to$ **Grph**	$G \mapsto CG$ グラフ G 上の自由圏	$G \to UCG$ 「生成元の挿入」
$U :$ **Grp** $\to$ **Set**	$X \mapsto FX$ 自由群，生成元 $x \in X$	$X \to UFX$ 「生成元の挿入」
$U :$ **Ab** $\to$ **Set**	$X \mapsto F_a X$ X 上の自由アーベル群	「生成元の挿入」
$U :$ **Ab** $\to$ **Grp**	$G \mapsto G/[G, G]$ 交換子群を法とする因子群	$G \to G/[G, G]$ 商の上の射影
$U : R$-**Mod** $\to$ **Ab**	$A \mapsto R \otimes A$	$A \to U(R \otimes A)$ $a \mapsto 1 \otimes a$
$U : R$-**Mod**-$S \to R$-**Mod**	$A \mapsto A \otimes S$	$A \to U(A \otimes S)$ $a \mapsto a \otimes 1$
$U :$ **Rng** $\to$ **Mon** （演習問題 III.1.1 を参照）	$M \mapsto \mathbf{Z}(M)$ （整）モノイド環	$M \to U\mathbf{Z}M$ $m \mapsto m$
$U : K$-**Alg** $\to K$-**Mod**	$V \mapsto TV$ V 上のテンソル代数	$V \subset TV$ 「生成元の挿入」
$U :$ **Fld** $\to$ $\mathbf{Dom}_m$ （III.1 を参照）	$D \mapsto QD$ 商体	$D \subset UQD$ 「$D : a \mapsto a/1$ の挿入」
$U :$ **Compmet** $\to$ **Met**	距離空間の完備化	（III.1 を参照）

余単位元の同様な記述も存在する．たとえば，$x \in X$ に対する元 $jx = \langle x \rangle$ によって生成される自由 R-加群 FX においては，元をスカラー $r_i \in R$ を持つ有限和 $\Sigma r_i \langle x_i \rangle$ として書くことができる．このとき任意の R-加群 A に対して余単位元 $\varepsilon_A : FUA \to A$ は $\Sigma r_i \langle a_i \rangle \mapsto \Sigma r_i a_i$ （A における線型結合）となる．言い換えれば，ε_A は任意の R-加群を自由加群（与えられた R-加群自身の元が生成元となるような自由加群）の商群として従来通りに表現する際に現れる全射である．

次に，対角函手に対するいくつかの左および右随伴（すべての圏 C に対して必ずしも存在するとは限らないが）を列記する．特に，C が **Set** のときは単位元を付けて列記する．

対角函手	随伴	単位元	余単位元
$\Delta : C \to C \times C$	左：余積 $\amalg : C \times C \to C$ $\langle a, b \rangle \mapsto a \amalg b$	入射（の対） $i : a \to a \amalg b$ $j : b \to a \amalg b$	「折り畳み」マップ $c \amalg c \to c$ $ix \mapsto x, jx \mapsto x$
	右：積 $\Pi : C \times C \to C$ $\langle a, b \rangle \mapsto a \times b$	対角射 $\delta_c : c \to c \times c$ $x \mapsto \langle x, x \rangle$	射影（の対） $p : a \times b \mapsto a$ $q : a \times b \mapsto b$
$C \to \mathbf{1}$	左：始対象 s		$s \to c$
	右：終対象 t	$c \to t$	
$\Delta : C \to C^{\downdownarrows}$ (III.3.(6))	左：コイコライザ $\langle f, g \rangle \mapsto e$（$e$ は f, g のコイコライザ対象）	コイコライザの射 $\langle f, g \rangle \xrightarrow{\langle uf, u \rangle} \langle e, e \rangle$	恒等射 $1 : c \to c$
(III.4.(7))	右：イコライザ $\langle f, g \rangle \mapsto d$（$d$ は f, g のイコライザ対象）	恒等射	イコライザの射 $\langle d, d \rangle \to \langle f, g \rangle$
$\Delta : C \to C^{\leftarrow \cdot \rightarrow}$	左：押し出し（の頂点）(III.3.(7)) 右：自明な函手 G_1 [3]		

[3] ［訳注］表中の G_1 は，$C^{\leftarrow \cdot \rightarrow}$ の各対象 ψ に対して $G_1(\psi) = \psi(\cdot)$ により一意的に求まる（自明な）函手 $G_1 : C^{\leftarrow \cdot \rightarrow} \to C$ を表す．

対角函手	随伴	単位元	余単位元
$\Delta : C \to C^{\to\cdot\leftarrow}$	左：自明な函手 G_2 [4] 右：引き戻し（の頂点） (III.4.(8))		
$\Delta : C \to C^J$	左：余極限の対象	普遍錐	
	右：極限の対象		普遍錐

極限の場合，単位元がどのようになるかは J の連結する成分の数によって決まる．任意の二つの対象 $j, k \in J$ について j と k を結ぶ射による有限列

$$j = j_0 \to j_1 \leftarrow j_2 \to \cdots \to j_{2n-1} \leftarrow j_{2n} = k \quad \text{（両方の方向が考えられる）}$$

が存在するとき，圏 J は**連結** (connected) していると呼ばれる（演習問題 7, 8 を参照されたい）．

双対函手はさらなる例を与える．体 K 上の線型空間 V, W について，双対 $\overline{D}$ は，対象においては $\overline{D}V = \mathbf{Vct}(V, K)$ によって，また射 $h : V \to W$ においては $\overline{D}h : \overline{D}W \to \overline{D}V$ によって与えられる $\mathbf{Vct}$ から $\mathbf{Vct}$ への反変函手である．ただし，$\mathbf{Vct}(V, K)$ は通常の線型空間の構造を持ち，各 $f : W \to K$ について $(\overline{D}h)f = fh$ とする．関数

$$\varphi = \varphi_{V,W} : \mathbf{Vct}(V, \mathbf{Vct}(W, K)) \to \mathbf{Vct}(W, \mathbf{Vct}(V, K)) \tag{1}$$

を，$h : V \to \overline{D}W$ に対して $[(\varphi h)w]v = (hv)w$ がすべての $v \in V$, $w \in W$ について成り立つように定義する．$\varphi_{W,V}\varphi_{V,W}$ が恒等写像なので，各 φ は全単射である．この全単射は以下のようにして随伴にすることができる．反変函手 $\overline{D}$ は，同じ対象関数を持つが異なる二つの（共変な！）函手

$$D : \mathbf{Vct}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Vct}, \qquad D^{\mathrm{op}} : \mathbf{Vct} \to \mathbf{Vct}^{\mathrm{op}}$$

をもたらす．それらの函手は射 $h^{\mathrm{op}} : W \to V$ および $h : V \to W$ について（従来通り）

$$Dh^{\mathrm{op}} = \overline{D}h : \overline{D}W \to \overline{D}V; \qquad D^{\mathrm{op}}h = (\overline{D}h)^{\mathrm{op}} : \overline{D}V \to \overline{D}W$$

---

[4] ［訳注］表中の G_2 は，$C^{\to\cdot\leftarrow}$ の各対象 ψ に対して $G_2(\psi) = \psi(\cdot)$ により一意的に求まる（自明な）函手 $G_2 : C^{\to\cdot\leftarrow} \to C$ を表す．

によって定義される．上記 (1) の全単射 φ はいまや V と W において自然な

$$\mathbf{Vct}^{\mathrm{op}}(D^{\mathrm{op}}W, V) \cong \mathbf{Vct}(W, DV) \tag{2}$$

として書き表せる．よって D^{op} は D の左随伴である．(注意：これは D の右随伴ではない．第 V 章第 5 節の演習問題 2 を参照されたい.) もし $\kappa_W : W \to \overline{D}\,\overline{D}W$ が二重の双対への普通のカノニカルマップならば, ((2) で $V = D^{\mathrm{op}}W$ としたときの) 随伴の単位元はこの写像 $\eta_W = \kappa_W : W \to DD^{\mathrm{op}}W$ であり，余単位元は同じ κ について $\varepsilon_V = (\kappa_V)^{\mathrm{op}}$ となる $\mathbf{Vct}^{\mathrm{op}}$ における射 $\varepsilon_V : D^{\mathrm{op}}DV \to V$ である．

この例は随伴が圏の同型に取って代わる方法を説明している．有限次元線型空間について，D と D^{op} は［それぞれ］同型である．しかし，一般には，このことは正しくなく，D は D^{op} の右随伴である．

この例はまた他の反変函手についての随伴とも関係がある．A から X への $\overline{S}$ および X から A への $\overline{T}$ という二つの反変函手は，a と x において自然な全単射 $A(a, \overline{T}x) \cong X(x, \overline{S}a)$ が存在するとき,「右において随伴」であると言う (Freyd). この術語は不要であろう．なぜなら，$\overline{S}$ と $\overline{T}$ の代わりに共変函手 $S : A^{\mathrm{op}} \to X$ と $T : X^{\mathrm{op}} \to A$ を取り，その双対で共変函手でもある $S^{\mathrm{op}} : A \to X^{\mathrm{op}}$ を作れるからである．よって，上記の自然な全単射は $X^{\mathrm{op}}(S^{\mathrm{op}}a, x) \cong A(a, Tx)$ になり，S^{op} は（我々の通常の意味での）T について左随伴である，あるいは，同じことだが，T^{op} は S について左随伴である．このことは必ずしも $\overline{T}$ と $\overline{S}$ が「左において」随伴であることと同値ではない．

次の三つの節は他の三種類の随伴に関わるものになる．(充満部分圏の）包含函手の左随伴は**反映** (reflection) と呼ばれる．また，随伴のその他の特別なもので圏の「同値 (equivalence)」と言うものもある．随伴に関するその他の興味深いいくつかの例が後の演習問題の中に与えられている．その内のいくつかは課題に関する知識が必要である．Goguen [1971] は有限状態機械 (finite state machine) について「最小実現 (minimal realization)」函手は「振る舞い (behavior)」函手に対する左随伴であることを証明した．読者にも自分自身の例を同じように見つけることを勧めたい．

演習問題

1. 体 K および K 上の線型空間 V について，次数付き反可換代数 (graded anti-commutative algebra) である「外積代数 (exterior algebra)」$E(V)$ が存在する．E は（忠実ではない）適当な忘却函手の左随伴であることを示せ．
2. 函手 $U : R\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ は左随伴 $A \mapsto R \otimes A$ だけでなく右随伴 $A \mapsto \hom_Z(R, A)$ も持つことを示せ．
3. 体 K に対して，$\mathbf{Lie}_K$ を K 上のすべての（小さな）リー代数 L からなり，リー括弧演算 (Lie bracket operation) $\langle a, b\rangle \mapsto [a, b]$ も保存する K-加群のモルフィズムを射に持つ圏とする．$V : \mathbf{Alg}_K \to \mathbf{Lie}_K$ を各（結合的）代数 A に同じ線型空間上のリー代数 VA を割り当てる函手とする．ただし VA は $a, b \in A$ について括弧 $[a, b] = ab - ba$ を持つ．ポアンカレ–バーコフ–ヴィットの定理 (Poincaré-Birkhoff-Witt Theorem) を用いて EL が L の包絡結合的多元環 (enveloping associative algebra) となるような函手 E が V の左随伴であることを示せ．
4. $\mathbf{Rng}'$ を乗法についての単位元を必ずしも含まない環 R からなる圏とする．R に単位元を加える標準的な手順が（単位元の存在を忘れる）忘却函手 $\mathbf{Rng} \to \mathbf{Rng}'$ の左随伴を与えることを示せ．
5. モノイド M を要素 $x \in M$ を対象に持つ離散圏とみなせば，M の乗法は双函手 $\mu : M \times M \to M$ になる．M が群ならば，その群の逆元は函手 $\mu(x, -)$ および $\mu(-, y) : M \to M$ の右随伴を与えることを示せ．逆に，そのような随伴の存在がモノイドを群にすると言えるか？
6. 押し出しと引き戻しの単位元と余単位元を書き表せ．
7. 圏 J が，ある集合 K の元 k を添字に持ち，$I_k : J_k \to J$ を余積の入射に持つ，圏 J_k の直和（余積）$\coprod J_k$ であるとき，各函手 $F : J \to C$ は函手 $F_k = FI_k : J_k \to C$ を決定する．
   (a) $\Pi_k \operatorname{Lim} F_k$ が存在するならば，$\operatorname{Lim} F \cong \Pi_k \operatorname{Lim} F_k$ となることを示せ．
   (b) すべての圏 J は（J の**連結コンポーネント** (connected component) と呼ばれる）連結圏の直和であることを示せ．
   (c) すべての極限は積と連結圏上の極限から得られることを導け．
8. (a) 圏 J が連結しているとき，任意の $c \in C$ について $\operatorname{Lim} \Delta c = c$ かつ $\operatorname{Colim} \Delta c = c$ となることを示せ．ただし $\Delta c : J \to C$ は定数函手である．
   (b) $\Delta : C \to C^J$ への右随伴の単位元を書き表せ．
9. (Smythe)．各圏 C にその対象からなる集合を割り当てる函手 $O : \mathbf{Cat} \to \mathbf{Set}$ は各集合 X に X 上の離散圏を割り当てる左随伴 D を持つこと，および，D は各圏にその連結コンポーネントからなる集合を割り当てる函手を左随伴に持つことを示せ．また，O は各集合 X に X の元を対象としすべての hom 集合が射を一つだけ持つような圏を割り当てる右随伴を持つことを示せ．

10. 圏 C が余核対 (cokernel pair) とイコライザの両方を持つとき，C の各射にその余核対を割り当てる函手 $K: C^2 \to C^{\downarrow\downarrow}$ は，平行な射の各組にそのイコライザとなる射を割り当てる函手を右随伴として持つことを示せ．
11. C が有限余積を持ち $a \in C$ であるとき，コンマ圏の射影 $Q: (a \downarrow C) \to C$ $\langle Q(a \to c) = c \rangle$ が $c \mapsto (a \to a \coprod c)$ を満たす左随伴を持つことを証明せよ．
12. X が集合で C が冪と余冪を持つ圏のとき，余冪 $c \mapsto X \cdot c$ は冪 $c \mapsto c^X$ の左随伴であることを証明せよ．

3 反映的部分圏

第 2 節に記載した忘却函手 $U: A \to X$ の多くについて，その随伴の余単位元 $\varepsilon: FU \dot{\to} I_A$ は各 $a \in A$ にエピ射 $\varepsilon_a: F(Ua) \to a$ を割り当てる．ε_a は自由対象の商として a に標準的表現を与える．これは一般的な事実である．つまり，右随伴 G が忠実ならば，その随伴のすべての余単位元 ε_a はエピである．

定理 1 随伴 $\langle F, G, \eta, \varepsilon \rangle : X \rightharpoonup A$ について次のことが成り立つ．(i) G が忠実であることと，余単位元 ε のすべてのコンポーネント ε_a がエピであることは同値である．(ii) G が充満であることと，すべての ε_a が分裂モニック射であることは同値である．よって，G が充満かつ忠実であることと，各 ε_a が同型射 $FGa \cong a$ であることは同値である．

この証明はある補題に依存する．

補題 2 $f^*: A(a, -) \dot{\to} A(b, -)$ を A の射 $f: b \to a$ によって引き起こされる自然変換とする．そのとき，f^* がモニックであることと f がエピであることは同値であり，また，f^* がエピであることと f が分裂モニック射であること（つまり，f が左逆射を持つこと）は同値である．

$f^* \mapsto f$ は米田の補題によって与えられる全単射 $\mathrm{Nat}(A(a,-), A(b,-)) \cong A(b, a)$ であることに注意されたい．

また，函手 $S, T: C \to B$ について，$B = \mathbf{Set}$ のとき，自然変換 $\tau: S \dot{\to} T$ が B^C 上でエピ（あるいはモニック）であることは，すべてのコンポーネン

ト $\tau_c : S_c \to T_c$ が B 上でエピ（あるいはモニック）であることと同値であることに注意されたい．このことは，第 III 章第 5 節演習問題 5 と同様に各点ごとの押し出しを計算することにより，第 III 章第 4 節演習問題 4 から導かれる．

証明　$h \in A(a,c)$ について，$f^*h = hf$ である．よって最初の結果はエピ射 f の定義そのものである．もし f^* がエピならば，$f^*h_0 = h_0 f = 1 : b \to b$ を満たす $h_0 : a \to b$ が存在する．よって f は左逆射を持つ．逆向きは明らかである．□

ここで定理を示す．自然変換（随伴によって付随された G の射関数）

$$A(a,c) \xrightarrow{G_{a,c}} X(Ga, Gc) \xrightarrow{\varphi^{-1}} A(FGa, c)$$

に対して米田の補題を適用する．これは（$c = a$ として）$1 : a \to a$ の像によって定まり，$1 : a \to a$ の像は余単位元 $\varepsilon_a : FGa \to a$ の定義に他ならない．しかし φ^{-1} は同型射なので，すべての $G_{a,c}$ が単射のとき，つまり G が忠実のときはこの自然変換はモニックになり，$G_{a,c}$ が全射のとき，つまり G が充満のときはエピになる．よって補題より結果が成り立つ．

B の部分圏 A について，包含函手 $K : A \to B$ が左随伴 $F : B \to A$ を持つとき，A は B において**反映的** (reflective) であると言う．この函手 F は**リフレクタ** (reflector) と呼ばれ，随伴 $\langle F, K, \varphi \rangle = \langle F, \varphi \rangle : B \rightharpoonup A$ はその部分圏 A における B の**反映** (reflection) と呼ばれることもある．包含函手 K は常に忠実なので，反映の単位元 ε は常にエピである．反映は合成函手 $R = KF : B \to B$ によって表現できる．実際，$A \subset B$ が B において反映的であるとき，かつそのときに限り，値が部分圏 A に含まれるような函手 $R : B \to B$ と，集合間の全単射で $b \in B$ および $a \in A$ において自然な

$$A(Rb, a) \cong B(b, a)$$

が存在する．反映は普遍射によっても記述できる．つまり，$A \subset B$ が反映的であるとき，かつそのときに限り，各 $b \in B$ について部分圏 A のある対象 Rb および射 $\eta_b : b \to Rb$ が存在して，各射 $g : b \to a \in A$ が A の一意的な射 $f : Rb \to a$ によって $g = f \circ \eta_b$ という形を取る．いつものように，R はこのとき（値が A に含まれる）函手 $B \to B$ （の対象関数）になる．

充満部分圏 $A \subset B$ が B において反映的ならば，定理 1 により各対象 $a \in A$ は FKa と同型となり，よってすべての a について $Ra \cong a$ となる．

双対的に，$A \subset B$ が B において**余反映的** (coreflective) であるとは，包含函手 $A \to B$ が右随伴を持つことである．(注意：Mitchell [1965] は「反映的」と「余反映的」の意味を入れ換えていた.)

ここで，いくつかの例を挙げる．**Ab** は **Grp** において反映的である．なぜなら，もし $G/[G,G]$ が群 G の通常の交換子群を法とする因子群ならば，アーベル群 A について $\hom(G/[G,G],A) \cong \hom(G,A)$ であり，かつ **Ab** は **Grp** において充満だからである．あるいは，一様連続関数を射に持つ，すべての距離空間からなる圏を考える．完備距離空間からなる（充満）部分圏は反映的である．この場合，リフレクタは各距離空間をそれを完備化したものに写す．今度は,（連続関数を射に持つ）すべての完全正則ハウスドルフ空間からなる圏を考える．すべてのコンパクトハウスドルフ空間からなる（充満）部分圏は反映的である．この場合，リフレクタは各完全正則空間をそれをストーン–チェックのコンパクト化 (Stone-Čech compactification) に写す．

Ab の余反映的部分圏はすべてのねじれアーベル群からなる充満部分圏である（群がねじれ (torsion) であるとは，すべての元が有限位数を持つことを言う）．この場合，コリフレクタは各アーベル群 A をすべての位数有限な A の元からなる部分群 $T(A)$ に写す．

演習問題

1. 双対な言明の表（第 II 章第 1 節）が以下に拡張できることを示せ．

言明	双対な言明
$S, T : C \to B$ は函手.	$S, T : C \to B$ は函手.
T は充満.	T は充満.
T は忠実.	T は忠実.
$\eta : S \dot{\to} T$ は自然変換.	$\eta : T \dot{\to} S$ は自然変換.
$\langle F, G, \varphi \rangle : X \rightharpoonup A$ は随伴.	$\langle G, F, \varphi^{-1} \rangle : A \rightharpoonup X$ は随伴.
η は $\langle F, G, \varphi \rangle$ の単位元.	η は $\langle F, G, \varphi^{-1} \rangle$ の余単位元.

2. ねじれのない (torsion-free) アーベル群[5]が **Ab** の充満かつ反映的な部分圏をなすことを示せ．
3. $\langle G, F, \varphi \rangle : X \rightharpoonup A$ を G が充満であるような随伴とし，すべての単位元 η_x がモニックであるとすると，すべての η_x はエピでもあることを示せ．
4. 以下の部分圏が反映的であることを示せ．
   (a) 順序保存関数を射に持つすべての前順序からなる圏 **Preord** における，すべての半順序からなる充満部分圏．
   (b) **Top** における T_0 空間からなる充満部分圏．
5. 随伴 $\langle F, G, \varphi \rangle : X \rightharpoonup A$ が与えられたとき，G が忠実であることと φ^{-1} がエピ射をエピ射に写すことは同値であることを示せ．
6. F または G が充満であるような随伴 $\langle F, G, \eta, \varepsilon \rangle$ が与えられたとき，$G\varepsilon : GFG \to G$ は $\eta G : G \to GFG$ を逆射に持つことを示せ．
7. A が B の充満かつ反映的な部分圏のとき，B 内に極限を持つどんな函手 $S : J \to A$ も A 内に極限を持つことを示せ．

4　圏の同値

函手 $S : A \to C$ が圏の**同型** (isomorphism) であるとは，ある（逆向きの）函手 $T : C \to A$ が存在して $ST = I : C \to C$ かつ $TS = I : A \to A$ を満たすことである．この場合，恒等自然変換 $\eta : I \dot{\to} ST$ および $\varepsilon : TS \dot{\to} I$ は $\langle T, S; \eta, \varepsilon \rangle : C \rightharpoonup A$ を随伴にする．言い換えれば，函手 S の 2 側面の逆函手 T は S の左随伴であり，同じ理由で，T は S の右随伴でもある．

より一般的な（そしてより便利な）概念が存在し，それは以下のようなものである．

函手 $S : A \to C$ が圏の**同値** (equivalence) である（そして圏 A と C が**同値** (equivalent) である）とは，ある（逆向きの）函手 $T : C \to A$ について自然同型 $ST \cong I : C \to C$ と $TS \cong I : A \to A$ が存在することである．この場合 $T : C \to A$ もまた圏の同値である．よって T が S の左随伴と右随伴の両方であることが，すぐに確かめられるだろう．

ここで，例を挙げる．任意の圏 C および充満部分圏 A について，C の各対象が A の唯一の対象と（C において）同型であるとき A を C の**骨格** (skeleton)

5　［訳注］単位元以外のすべての元の位数が無限である群．

と呼ぶ．そのとき A は C と同値であり包含函手 $K : A \to C$ は圏の同値である．このことを示すために，各 $c \in C$ について，ある A の対象 Tc との同型 $\theta_c : c \cong Tc$ を考える．このとき一意的なやり方で，θ が自然同型 $\theta : I \cong KT$ となるように T を函手 $T : C \to A$ にすることができる．さらに $TK \cong I$ となり，よって K はまさに同値である．つまり，**圏はそれ自身の（任意の一つの）骨格と同値である**．たとえば，すべての有限集合からなる圏はすべての有限な順序数 $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ を対象に持つ充満部分圏を骨格として持つ（ここで 0 は空集合で各 n は $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ である）．

圏が**骨格的** (skeletal) であるとは，任意の二つの同型な対象が等しい，つまり，その圏がそれ自身の骨格となることである．

随伴 $\langle T, S, \eta, \varepsilon \rangle : C \rightharpoonup A$ で単位元 $\eta : I \dot{\to} ST$ と余単位元 $\varepsilon : TS \dot{\to} I$ が共に自然同型，つまり $I \cong ST$ かつ $TS \cong I$ となるものを圏の**随伴同値** (adjoint equivalence) と呼ぶ．このとき η^{-1} と ε^{-1} もまた自然同値であり，三角恒等図式 $\varepsilon T \cdot T\eta = 1$ と $S\varepsilon \cdot \eta S = 1$ は，それぞれ，$T\eta^{-1} \cdot \varepsilon^{-1} T = 1$ および $\eta^{-1} S \cdot S\varepsilon^{-1} = 1$ によって書き表すことができる．よって，これらの恒等変換は $\langle S, T, \varepsilon^{-1}, \eta^{-1} \rangle : A \rightharpoonup C$ が $\varepsilon^{-1} : I \dot{\to} TS$ を単位元に持ち $\eta^{-1} : ST \dot{\to} I$ を余単位元に持つ随伴になることを示している．それゆえ随伴同値 $\langle T, S, -, - \rangle$ において，函手 $T : C \to A$ は単位元 η を持つ $S : A \to C$ の左随伴であり，同時に T は単位元 ε^{-1} を持つ $S : A \to C$ の右随伴である．

ここに至って，同値に関する主な事実を述べることができる．

定理 1 函手 $S : A \to C$ に関する以下の性質は論理的に同値である．

(i) S は圏の同値である．

(ii) S は随伴同値 $\langle T, S, \eta, \varepsilon \rangle : C \rightharpoonup A$ の一部である．

(iii) S は充満かつ忠実で，各対象 $c \in C$ はある対象 $a \in A$ による Sa と同型である．

証明 明らかに (ii) から (i) が成り立つ．(i) から (iii) を導くために，$ST \cong I$ から，各 $c \in C$ について，ある $a = Tc \in A$ が存在して $c \cong S(Tc)$ が成り立つことに注意する．自然同型 $\theta : TS \cong I$ は各 $f : a \to a'$ について可換図式

$$\begin{array}{ccc} TSa & \xrightarrow{\theta_a} & a \\ {\scriptstyle TSf}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ TSa' & \xrightarrow[\theta_{a'}]{} & a' \end{array}$$

を与える．それゆえ $f = \theta_{a'} \circ TSf \circ \theta_a^{-1}$ となり，S は忠実である．対称的に，$ST \cong I$ から T が忠実であることがわかる．S が充満であることを示すために，任意の $h : Sa \to Sa'$ を考え $f = \theta_{a'} \circ Th \circ \theta_a^{-1}$ とする．このとき上記の正方図式は Sf を h に置き換えたものに関しても可換になり，よって $TSf = Th$ となる．T は忠実なので，$Sf = h$ となり，S が充満であることが言えた．

(iii) から (ii) を導くためには S から（左）随伴 T を構成する必要がある．各 $c \in C$ について，ある対象 $a_0 = T_0 c \in A$ および同型射 η_c を選ぶことができる．

$$\begin{array}{ccc} \eta_c : c & \cong & S(T_0 c) \\ & {\scriptstyle f}\searrow & \downarrow{\scriptstyle Sg} \\ & & Sa \end{array} \qquad g : T_0 c \to a$$

S は充満なので，すべての射 $f : c \to Sa$ について，合成 $f \circ \eta_c^{-1}$ は適当な g によって Sg となる．しかも，S は忠実なので g は唯一である．言い換えれば，一意的な g によって $f = Sg \circ \eta_c$ となり，η_c は c から S への普遍射である．それゆえ一意的な方法によって T_0 から $\eta : I \dot{\to} ST$ が自然であるような函手 $T : C \to A$ を作ることができる．このとき T は S の左随伴となり，その単位元は同型変換 η となる．任意の随伴の場合と同じく，$S\varepsilon_a \cdot \eta_{Sa} = 1$ となる（上記の図式において $c = Sa$ かつ $f = 1$ とする）．よって $S\varepsilon_a = (\eta_{Sa})^{-1}$ は可逆である．S は充満かつ忠実なので，余単位元 ε_a もまた可逆である．それゆえ $\langle T, S, \eta, \varepsilon \rangle : C \rightharpoonup A$ は随伴同値となり，証明が完成した． □

この証明の中で，A を C の充満部分圏とし，$S = K : A \to C$ を挿入函手とする．このとき，対象 $a \in A \subset C$ について $a_0 = a = Ka$ および恒等射 η_{Ka} を選ぶことができる．それゆえ $K\varepsilon_a = 1$ となり，すべての a について $\varepsilon_a = 1$ となる．このことから以下が成り立つ．

命題 2 もし A が C の充満部分圏で，すべての $c \in C$ が A のある対象と（C において）同等であれば，挿入函手 $K : A \to C$ は同値であり，余単位元が恒等変換であるような随伴同値 $\langle T, K, \eta, 1 \rangle : C \rightharpoonup A$ の一部である．それゆえ A は C において反映的である．

特に A が C の骨格のときは，この命題は既に述べたような場合を含めている．

函手 $F : X \to A$ が $G : A \to X$ の**左随伴左逆函手** (left-adjoint-left-inverse) であるとは，余単位元が恒等変換であるような随伴 $\langle F, G, \eta, 1 \rangle : X \rightharpoonup A$ が存在することを言う．これは G が X の反映的部分圏への A からの同型であることを意味する（演習問題 4）．直前の命題 2 の場合では，挿入函手 $A \to C$ が左随伴左逆函手であることを示している．

関数解析における双対定理はしばしば同値の例となる．たとえば，**CAb** をコンパクト位相アーベル群の圏とし，さらに P をそのような各群 G にその指標群 PG，つまりすべての連続な準同型写像 $G \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ からなる群を割り当てるものとする．ポントリャーギンの双対定理は $P : \mathbf{CAb} \to \mathbf{Ab}^{\mathrm{op}}$ が圏の同値であることを主張している．同様に，ゲルファント–ナイマルクの定理 (Gel'fand-Naimark theorem) は，各コンパクトハウスドルフ空間 X を連続な複素数値関数からなる加法的 C^* 環に写す函手 C が圏のある同値となることを述べている（Negrepontis [1971] を参照されたい）．

演習問題

1. 以下を証明せよ．
   (a) 圏 C の任意の二つの骨格は同型である．
   (b) A_0 が A の骨格で C_0 が C の骨格ならば，A と C が同値であることの必要十分条件は A_0 と C_0 が同型となることである．
2. (a) 二つの同値 $D \to C$ と $C \to A$ の合成は同値であることを示せ．
   (b) これに対応する随伴同値に関する事実を述べ，証明せよ．
3. もし $S : A \to C$ が充満，忠実，かつ対象において全射（つまり各 $c \in C$ について $c = Sa$ となる $a \in A$ が存在する）であるとき，単位元を恒等変換に持つ随伴同値 $\langle T, S, 1, \varepsilon \rangle : C \rightharpoonup A$ が存在する（よって T は S の左随伴右逆函手である）ことを示せ．

4. 函手 $G:A\to X$ について，以下の三つの条件は論理的に同値であることを証明せよ．
   (a) G は左随伴左逆函手を持つ．
   (b) G は左随伴を持ち，充満，忠実，かつ対象において単射である．
   (c) X の充満な反映的部分圏 Y および $G=KH$ を満たす同型 $H:A\cong Y$ が存在する．ただし $K:Y\to X$ は挿入函手である．
5. J が連結圏で $\Delta:C\to C^J$ が左随伴（余極限）を持つならば，この左随伴は左随伴左逆函手となるように選べることを示せ．

5　前順序に関する随伴

前順序 P は集合 $P=\{p,p',\ldots\}$ で反射的かつ推移的な二項間関係 $p\leqq p'$ を持つものであることと，前順序は順序保存関数が函手になるような圏とみなせることを思い出そう．このとき P から Q への順序を逆転させる関数 $\overline{L}$ は函手 $L:P\to Q^{\mathrm{op}}$ となる．

定理 1　（ガロア接続は随伴対である）．P と Q を二つの前順序とし $L:P\to Q^{\mathrm{op}}$ と $R:Q^{\mathrm{op}}\to P$ を二つの順序保存関数とする．ここで（函手とみなしたときの）L が R への左随伴であるとき，かつそのときに限り，すべての $p\in P$ および $q\in Q$ について，

$$Q \text{ 上で } Lp\geqq q \text{ であることと } P \text{ 上で } p\leqq Rq \text{ であることは同値} \tag{1}$$

が成り立つ．この場合，L を R の左随伴にする随伴 φ が唯一存在する．すべての p と q について，$p\leqq RLp$ かつ $LRq\geqq q$ であり，よって次も成り立つ．

$$Lp\geqq LRLp\geqq Lp \text{ かつ } Rq\leqq RLRq\leqq Rq. \tag{2}$$

証明　P は $p\leqq p'$ のときはいつでも（ちょうど）一つの射 $p\to p'$ を持つ圏になることに注意する．このとき条件 (1) はまさにある全単射 $\hom_{Q^{\mathrm{op}}}(Lp,q)\cong\hom_P(p,Rq)$ が存在することを意味する．さらに，各 hom 集合は高々一つの元を持つので，この全単射は自動的に自然である．その随伴の単位元はすべての p についての不等式 $p\leqq RLp$ であり，余単位元はすべての q についての不等式 $LRq\geqq q$ である．(2) の二つの式は単位元と余単位元をつなぐ三角

恒等図式である．P と Q が共に半順序集合（つまり，両方の関係 $\leqq$ が反対称的）という便利な場合においては，これらの条件は $L = LRL$ かつ $R = RLR$ になる（それぞれの 3 つの項は一つにまとめられる！）． □

(1) を満たす順序保存関数 L と R の組は P から Q への**ガロア接続** (Galois connection) と呼ばれる．ここで基本的な例を挙げる．群 G および集合 U を取り，$\sigma \in G$ と $x \in U$ に対する $\langle \sigma, x \rangle \mapsto \sigma \cdot x$ によって G の U への作用を考える．P をすべての部分集合 $X \subset U$ の集まり $\mathcal{P}(U)$ とし，包括関係による順序を考える．さらに，Q を部分集合 $S \subset G$ の集まり $\mathcal{P}(G)$ とし，やはり包括関係による順序（$S \leqq S'$ を $S \subset S'$ により定義）を考える．さらに，$LX = \{\sigma | x \in X \text{ ならば} \sigma \cdot x = x\}$ かつ $RS = \{x | \sigma \in S \text{ ならば} \sigma \cdot x = x\}$ とする．このことはつまり，LX はすべての点 $x \in X$ を不動にするような G の部分群であり，RS は S の自己同型の不動点の集合である．このとき，Q 上で $LX \geqq S$ であることと，すべての $\sigma \in S$ および $x \in X$ について $\sigma \cdot x = x$ であることは同値となり，ひいては，P 上で $X \leqq RS$ であることと同値となる．それゆえ，L と R は随伴の組（ガロア接続）をなす．もともとの例は，古典的なガロア理論において見られるような，G が体 U の自己同型写像の群となるような場合である．

U と V が集合ならば, U のすべての部分集合の集合 $\mathcal{P}(U)$ が包括関係に関して前順序となる．各関数 $f : U \to V$ について $f_*(X) = \{f(x) | x \in X\}$ によって定義される順像 (direct image) f_* は順序保存関数となり，ひいては函手 $f_* : \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(V)$ となる．逆像 $f^*(Y) = \{x | \text{ ある } y \in Y \text{ について } fx = y\}$ は逆方向に函手 $f^* : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(U)$ を定義する．$f_* X \subset Y$ と $X \subset f^* Y$ は同値なので，順像函手 f_* は逆像函手 f^* への左随伴となる．

ブール代数に関するある随伴は論理における基本的な結合記号と深い関わりがある．もう一度 $\mathcal{P}(U)$ を前順序ひいては圏と見なす．対角函手 $\Delta : \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U)$ は（既に注意したように）部分集合 X, Y をその共通部分 $X \cap Y$ に写す右随伴 $\cap$ を持ち，$\langle X, Y \rangle \mapsto X \cup Y$ という和を取る左随伴 $\cup$ を持つ．もし X が U の固定された部分集合ならば，X との共通部分は函手 $X \cap - : \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(U)$ になる．X' を U における X の補集合とすると，$X \cap Y \leqq Z$ と $Y \leqq X' \cup Z$ は同値なので，$X \cap -$ の右随伴は $X' \cup -$

になる．それゆえ適当な随伴の構造から「かつ」,「または」,「でない」に対応するブール演算子 $\cap, \cup, '$ が得られる．ここで二つの集合 U および V の積からの第一射影 $P: U \times V \to U$ を考える．各部分集合 $S \subset U \times V$ から二つの対応する U の部分集合を

$$P_* S = \{x | \exists y, y \in V \text{ かつ } \langle x, y \rangle \in S\} ,$$
$$P_\sharp S = \{x | \forall y, y \in V \text{ ならば } \langle x, y \rangle \in S\}$$

によって定義する．これらの集合は $\langle x, y \rangle \in S$ から存在限量子 $\exists y$「ある y が存在して」および全称限量子 $\forall y$「すべての y について」をそれぞれ $\langle x, y \rangle \in S$ に適用することによって得られる．$P_* S$ は射影 P による S の順像でもある．ここで，すべての部分集合 $X \subset U$ について，

$$S \leqq P^* X \Leftrightarrow P_* S \leqq X; \qquad P^* X \leqq S \Leftrightarrow X \leqq P_\sharp S$$

が成り立つ．ここで，$\Leftrightarrow$ は「ならば，かつその場合に限り」を意味する．これらのことから P^* という逆像演算子が左随伴 P_* と右随伴 $P_\sharp$ の両方を持つことがわかる．この意味で，両方の限量子 $\exists$ および $\forall$ は随伴として解釈できる．

幾何学的な解釈もある．つまり，$P^* X$ は底面 $X \subset U$ 上の円柱 $X \times V \subset U \times V$，$P_* S$ は $S \subset U \times V$ の底面 U への射影，そして $P_\sharp S$ は U の部分集合 X で X 上の円柱が完全に S に含まれる最大のものである．このような分析は随伴になるような論理のいくつかの基本的概念（かつ，または，でない，$\forall, \exists$）を明らかにしてきた．これは「随伴は至るところに存在する」というスローガンの実例である．

演習問題

1. H を（ヒルベルト空間のような）内積を持つ空間とする．$P = Q$ が H のすべての部分集合 S の集合で包含による順序を持つとき，$LS = RS = S$ の直交補空間はガロア接続をなすことを示せ．
2. 半順序集合間のガロア接続において，P の部分集合 $\{p | p = RLp\}$ と $\{p |$ ある q について $p = Rq\}$ が等しいことを示し，この集合から Q の部分集合 $\{q | q = LRq\}$ への全単射を与えよ．体の自己同型写像からなる群の場合は，これらの集合は何か? これは任意の随伴に一般化されるか?

3. 引き戻しを持つ圏 C について，各射 $f : a \to a'$ から函手 $(C \downarrow f) = f_* : (C \downarrow a) \to (C \downarrow a')$ が定義できる．この函手は $(C \downarrow a)$ の各対象 $x \to a$ を合成 $x \to a \to a'$ に写す．f_* は $f^*(x' \to a') = y \to a$，ただし y は $a \to a' \leftarrow x'$ の引き戻しの頂点，によって定義される f^* を右随伴に持つことを示せ．

6 カルテシアン閉圏

多くの圏論の効力は特別な構造が付加された圏を使っているときに発揮されるようである．一つの基本的な例は閉圏であろう（第 VII 章第 7 節）．現時点では「カルテシアン閉」という一つの便利で特殊な例をすぐに定義できる．

圏 C がすべての有限な積と余積を持つことを示すことは，積，終対象，始対象および余積が存在すること，よって函手 $C \to \mathbf{1}$ および $\Delta : C \to C \times C$ が左と右の両方の随伴を持つことを示すことに等しい．実際，これらの左随伴はそれぞれ始対象と余積を与え，一方では，これらの右随伴はそれぞれ終対象と積を与える．

ここで随伴だけを用いて「カルテシアン閉圏」を定義しよう．明確に与えられたすべての有限な積を持つ圏 C が**カルテシアン閉** (cartesian closed) であるとは，次の各函手

$$C \to \mathbf{1}\,, \qquad C \to C \times C\,, \qquad C \xrightarrow{-\times b} C$$
$$c \mapsto 0 \qquad\quad c \mapsto \langle c, c\rangle \qquad\quad a \mapsto a \times b$$

が（特定の随伴 (adjunction) による）**特定の右随伴** (right adjoint) を持つことである．これらの随伴は以下のように書き表される．

$$t \leftarrow\!\dashv 0\,, \qquad a \times b \leftarrow\!\dashv \langle a, b\rangle\,, \qquad c^b \leftarrow\!\dashv c\,.$$

第一の特定は C における終対象 t を特定することで，第二の特定は各対象の組 $a, b \in C$ に対する積対象 $a \times b$ をその射影 $a \leftarrow a \times b \to b$ と一緒に特定することである．これらの射影は随伴を決める（つまり，それらは随伴の余単位元を構成する）．よって，既に注意したように，$\times$ は双函手である．第三の要求される随伴は，各函手 $- \times b : C \to C$ に対して，それに対応する，a と c について自然な全単射

$$\hom(a \times b, c) \cong \hom(a, c^b)$$

を伴う右随伴を特定する．それゆえに（次の節で証明される）変数定理から，$\langle b, c\rangle \mapsto c^b$ は双函手 $C^{\mathrm{op}} \times C \to C$（の対象関数）となる．この随伴を特定することは結局，各 c と b について，c に対して自然であり $- \times b$ から c への普遍射となる射 e

$$e : c^b \times b \to c$$

を特定することに等しい．この $e = e_{b,c}$ は**評価** (evaluation) マップと呼ばれる．以下の場合のどちらにおいても，そのマップは結局引数 x における関数 f の従来の評価 $\langle f, x\rangle \mapsto fx$ になる．

Set は $c^b = \hom(b, c)$ とするカルテシアン閉圏である．

Cat は冪乗 C^B を函手圏とするカルテシアン閉圏である．

密接に関係する随伴の例は函手

$$- \otimes_K B : K\text{-}\mathbf{Mod} \to K\text{-}\mathbf{Mod}$$

である．この函手は $\hom_K(B, -)$ を右随伴に持つ．つまり，この随伴は評価によって与えられる余単位元 $\hom_K(B, A) \otimes_K B \to A$ によって定められる．

演習問題

1. (a) U が任意の集合のとき，U のすべての部分集合からなる前順序集合 $\mathcal{P}(U)$ がカルテシアン閉圏になることを示せ．
   (b) 任意のブール代数は前順序集合とみなせばカルテシアン閉であることを示せ．
2. ある基礎的な理論 T において，T の閉論理式の集合 $S = \{p, q, \ldots\}$ を，$p \leqq q$ を「p から q が示せる」（つまり，T の公理のもとで q は p の結果である）で定義することにより前順序集合として考える．積を論理積によって，冪乗 q^p を「p ならば q」によって与えることにより，S がカルテシアン閉圏であることを証明せよ．
3. 任意のカルテシアン閉圏において，$c^t \cong c$ および $c^{b \times b'} \cong (c^b)^{b'}$ を証明せよ．
4. 任意のカルテシアン閉圏において自然変換 $c^b \times b^a \to c^a$ を求めよ．**Set** においてこれは関数の合成に一致する．(合成と同様に) 結合律を満たすことを証明せよ．
5. A がカルテシアン閉であっても A^J が必ずしもカルテシアン閉になるとは限らないことを示せ．

7　随伴の変換

今度は異なる随伴を比べるマップを調べよう．二つの随伴

$$\langle F, G, \varphi, \eta, \varepsilon \rangle : X \rightharpoonup A, \qquad \langle F', G', \varphi', \eta', \varepsilon' \rangle : X' \rightharpoonup A' \tag{1}$$

が与えられたとして，(前者から後者への) **随伴のマップ** (map of adjunctions) を次の条件を満たす函手 $K : A \to A'$ および $L : X \to X'$ の組として定義する．この K と L について，函手による両側の四角図式

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{G} & X & \xrightarrow{F} & A \\ {\scriptstyle K}\downarrow & & {\scriptstyle L}\downarrow & & {\scriptstyle K}\downarrow \\ A' & \xrightarrow[G']{} & X' & \xrightarrow[F']{} & A' \end{array} \tag{2}$$

は可換であり，hom 集合および随伴からなる図式

$$\begin{array}{ccc} A(Fx, a) & \xrightarrow{\varphi} & X(x, Ga) \\ {\scriptstyle K = K_{Fx,a}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle L = L_{x,Ga}} \\ A'(KFx, Ka) & & X'(Lx, LGa) \\ \| & & \| \\ A'(F'Lx, Ka) & \xrightarrow{\varphi'} & X'(Lx, G'Ka) \end{array} \tag{3}$$

はすべての対象 $x \in X$ と $a \in A$ について可換である．ここで $K_{Fx,a}$ は函手 K によって与えられる写像 $f \mapsto Kf$ であり，Kf は各 $f : Fx \to a$ を適用して得られたものである．

命題 1　随伴 (1)，および (2) を満たす函手 K および L が与えられたとき，hom 集合上の条件 (3) は $L\eta = \eta' L$ と同値であり，また $\varepsilon' K = K\varepsilon$ とも同値である．

証明　(3) が可換なときは，$a = Fx$ とし，恒等射 $1 : Fx \to Fx$ が (3) に沿ってどうなるかを調べれば，単位元 η, η' および同値性

$$\langle L\eta : L \to LGF \rangle = \langle \eta' L : L \to G'F'L \rangle$$

が得られる．ここで (2) より $LGF = G'F'L$ である．逆に，自然変換どうしの同値性 $L\eta = \eta' L$ が与えられているときは，これらの単位元による随伴 φ と φ' の定義から (3) が言える．余単位元の場合はこれの双対を考えればよい．

□

次に，二つの圏を共有する二つの随伴

$$\langle F, G, \varphi, \eta, \varepsilon\rangle, \qquad \langle F', G', \varphi', \eta', \varepsilon'\rangle : X \rightharpoonup A \tag{4}$$

が与えられたとき，二つの自然変換

$$\sigma : F \dot{\to} F', \qquad \tau : G' \dot{\to} G$$

が（与えられた随伴に対して）**共役** (conjugate) であるとは，図式

$$\begin{array}{ccc} A(F'x,a) & \overset{\varphi'}{\cong} & X(x,G'a) \\ {\scriptstyle (\sigma_x)^*=A(\sigma_x,a)}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle X(x,\tau_a)=(\tau_a)_*} \\ A(Fx,a) & \underset{\varphi}{\cong} & X(x,Ga) \end{array} \tag{5}$$

がすべての対象 $x \in X$ および $a \in A$ の組について可換であることを言う．

定理 2 二つの随伴 (4) が与えられたとき，自然変換 σ と τ が共役であることと以下の 4 つの（自然変換による）図式のどれかが可換であることは同値である．

$$\begin{array}{ccc} G' & \xrightarrow{\tau} & G \\ {\scriptstyle \eta G'}\Big\downarrow & & \Big\uparrow{\scriptstyle G\varepsilon'} \\ GFG' & \xrightarrow[G\sigma G']{} & GF'G' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\sigma} & F' \\ {\scriptstyle F\eta'}\Big\downarrow & & \Big\uparrow{\scriptstyle \varepsilon F'} \\ FG'F' & \xrightarrow[F\tau F']{} & FGF' \end{array} \tag{6}$$

$$\begin{array}{ccc} FG' & \xrightarrow{F\tau} & FG \\ {\scriptstyle \sigma G'}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \varepsilon} \\ F'G' & \xrightarrow[\varepsilon']{} & I_A \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} I_X & \xrightarrow{\eta} & GF \\ {\scriptstyle \eta'}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle G\sigma} \\ G'F' & \xrightarrow[\tau F']{} & GF' \end{array} \tag{7}$$

また，随伴 (4) および自然変換 $\sigma : F \dot{\to} F'$ が与えられたとき，一意的な

$\tau : G' \dot{\to} G$ が存在して組 $\langle \sigma, \tau \rangle$ が共役となる．双対的に，(4) および τ が与えられたとき，一意的な σ が存在して $\langle \sigma, \tau \rangle$ が共役となる．

証明　まず，(5) から (6) が成り立ち，(5) から (7) が成り立つ．それを示すために，(5) において $x = G'a$ とし，右上の［hom 集合の］中の恒等射 $1 : G'a \to G'a$ から始めて，φ と φ' を単位元と余単位元で表し，この要素 1 を以下のように図式に沿って追跡する．

$$
\begin{array}{ccc}
\varepsilon'_a & \longleftarrow\!\!\!\!\!\shortmid & 1 = 1_{G'a} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\varepsilon'_a \circ \sigma_{G'a} & \longmapsto & G\varepsilon'_a \circ G\sigma_{G'a} \circ \eta_{G'a} = \tau_a
\end{array}
$$

この結果（右下）は (6) の最初の同値性に相当する．少々異なる追跡によって

$$
\begin{array}{ccc}
\varepsilon'_a & \longleftarrow\!\!\!\!\!\shortmid & 1 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\varepsilon'_a \circ \sigma_{G'a} = \varepsilon_a \circ F\tau_a & \longleftarrow\!\!\!\!\!\shortmid & \tau_a
\end{array}
$$

も得られる．この結果で得られた同値性は (7) の最初の図式に相当する．(6) と (7) の二番目の方も双対的に得られる．

次に，σ は与えられているが τ は与えられていないとする．このとき米田の補題を合成変換 $\varphi \circ (\sigma_x)^* \circ {\varphi'}^{-1}$（(5) の三つの脚）に適用するとある射 τ'_a による一意的な族について (5) が可換となり，さらにその族が自然変換になることが示される．各 $\varepsilon_a : FGa \to a$ は F から a への普遍射なので，(7) の最初の図式を可換にするような射 $\tau''_a : G'a \to Ga$ による一意的な族もまた存在する．(5) から (7) となるので，$\tau'_a = \tau''_a$ が成り立つ．言い換えれば，$\tau = \tau''$ が (7) の最初の図式を可換にするのならば，それは (5) も可換にする．それゆえ (7) の最初の図式から (5) が成り立つ．σ が与えられたとき，(6) の最初の図式が可換になる一意的な自然変換 $\tau : G' \dot{\to} G$ が明らかに存在する．(5) から (6) となるので，$\tau'_a = \tau_a$ が成り立ち，よって (5) の解 τ'_a は必然的に自然になる．さらに (6) から (5) が成り立つ．□

読者はまた自然変換による適当な図式を構成することによって，(6) から (5) あるいは (7) を導くこともできる．

ここで，共役な自然変換の二つ組を最初の随伴から二番目の随伴への**変換** (transformation)（またはモルフィズム）と見なす．このような二つの変換

$$\langle F, G, \eta, \varepsilon\rangle \xrightarrow{\langle\sigma,\tau\rangle} \langle F', G', \eta', \varepsilon'\rangle \xrightarrow{\langle\sigma',\tau'\rangle} \langle F'', G'', \eta'', \varepsilon''\rangle \tag{8}$$

の「垂直な」合成は（たとえば条件 (5) によって）明らかに最初の随伴から三番目の随伴への変換 $\langle\sigma',\tau'\rangle\circ\langle\sigma,\tau\rangle = \langle\sigma'\cdot\sigma, \tau\cdot\tau'\rangle$ である．よって，与えられた二つの圏 X および A について，X から A への**随伴の圏** (category of adjunctions) という新たな圏 $A^{(\mathrm{adj})X}$ が定義できる．その対象は随伴 $\langle F, G, \eta, \varepsilon\rangle$，射は変換（共役対）$\langle\sigma,\tau\rangle$ で，合成はいま述べたものである．また，以下のような，従来の函手圏への二つの自明な「忘却」函手が存在する．

$$A^X \leftarrow A^{(\mathrm{adj})X}, \qquad [A^{(\mathrm{adj})X}]^{\mathrm{op}} \to X^A,$$

$$\begin{array}{ccccc}
F & \longleftarrow\!\shortmid & \langle F, G, \eta, \varepsilon\rangle & \shortmid\!\longrightarrow & G \\
{\scriptstyle\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\langle\sigma,\tau\rangle} & & \uparrow{\scriptstyle\tau} \\
F' & \longleftarrow\!\shortmid & \langle F', G', \eta', \varepsilon'\rangle & \shortmid\!\longrightarrow & G'
\end{array}$$

Set に対する典型的な例は第 1 節で述べた（固定された各集合 T に対する）随伴の例としての全単射

$$\hom(S\times T, R) \cong \hom(S, \hom(T, R)) \tag{9}$$

である．$t : T \to T'$ が二つのそのような集合間の関数ならば，$-\times t$ は函手どうしの自然変換 $-\times T \stackrel{\cdot}{\to} -\times T'$ である．その共役は自然変換 $\hom(t, -) : \hom(T', -) \stackrel{\cdot}{\to} \hom(T, -)$ である．これは，当然のことながら，引数 T について $S\times T$ は共変函手になり $\hom(T, R)$ は反変函手になるという事実に対応して，逆方向を向いている．(9) を「パラメータ」$T \in \mathbf{Set}$ 付きの随伴と呼ぶことができる．可換環 K に対して随伴 $\mathbf{Mod}_K(A\otimes_K B, C) \cong \mathbf{Mod}_K(A, \hom_K(B, C))$ はパラメータ $B \in \mathbf{Mod}_K$ を持つ．ここで一般的なことがらを述べる．

定理 3 (パラメータ付きの随伴). 双函手 $F : X \times P \to A$ が与えられたとして, 各対象 $p \in P$ について $F(-,p) : X \to A$ が右随伴 $G(p,-) : A \to X$ を, x と a について自然な随伴

$$\hom(F(x,p),a) \cong \hom(x, G(p,a)) \tag{10}$$

によって持つと仮定する. このとき, P の各射 $h : p \to p'$ と各対象 $a \in A$ に X の射 $G(h,a) : G(p',a) \to G(p,a)$ を割り当てる一意的な方法が存在し, それによって G は双函手 $P^{\mathrm{op}} \times A \to X$ となり, かつ, 随伴 (10) の全単射が三変数 x, p および a のすべてについて自然であるようなものとなる. $\langle h, a\rangle$ への射 $G(h,a)$ の上記の割り当ては $G(h,-)$ を $F(-,h)$ に共役な自然変換にする一意的な方法として記述することもできる.

証明 随伴 (10) が $p \in P$ について自然という条件は四角図式

$$\begin{array}{ccc} \hom(F(x,p),a) & \cong & \hom(x,G(p,a)) \\ \uparrow{\scriptstyle F(x,h)^*} & & \uparrow{\scriptstyle G(h,a)_*} \\ \hom(F(x,p'),a) & \cong & \hom(x,G(p',a)) \end{array}$$

の可換性に相当する. (すべての a についての) この可換性は $G(h,-) : G(p',-) \dot{\to} G(p,-)$ が $F(-,h) : F(-,p) \dot{\to} F(-,p')$ への共役として選ばれなくてはならないと述べているに他ならない. 前定理によって, これを実現する $G(h,-)$ の一意的な選択が存在し —— しかも共役の条件は前定理で述べた五つの同等な方法のいずれでも表現できる. 二番目の射 $h' : p' \to p''$ に対して, 共役の選び方の一意性から $h'h$ について $G(h'h,-) = G(h,-) \circ G(h',-)$ が成り立ち, よって求められていた通り, $G(-,a)$ は函手となり G は双函手になる. □

双対的に, 双函手 $G : P^{\mathrm{op}} \times A \to X$ が与えられていて各 $G(p,-)$ が左随伴 $F(-,p)$ を持つときは, F を双函手 $X \times P \to A$ にする一意的な方法が存在する.

演習問題

1. C における余冪 $X \cdot a$ の定義 $C(X \cdot a, c) \cong \mathbf{Set}(X, C(c, a))$ をパラメータ a 付きの随伴として説明せよ．
2. $\eta_x : x \to G(p, F(x,p))$ をパラメータ付きの随伴の単位元とする．これは x について自然だが，η のどんな性質が随伴 (10) の p についての自然性に対応しているのか?
3. 函手圏 A^X に対し S をその充満部分圏とする．ただし S の対象はある右随伴 $RF : A \to X$ を持つ函手 $F : X \to A$ である．各 F について RF を一つ選ぶことによって，$R\sigma$ が σ の共役となるように，R を函手 $S^{\mathrm{op}} \to X^A$ として定義せよ．
4. (Kelly)．**随伴正方図式** (adjoint square) とは圏，函手，随伴，および自然変換による配列

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\langle F,G,\varphi\rangle} & A \\ {\scriptstyle H}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle K} \\ X' & \xrightarrow[\langle F',G',\varphi'\rangle]{} & A' \end{array} \qquad \begin{array}{c} \sigma : F'H \stackrel{\cdot}{\to} KF \\ \\ \\ \tau : HG \stackrel{\cdot}{\to} G'K \end{array}$$

で以下の hom 集合による図式が常に可換になるようなものを言う．

$$\begin{array}{ccccc} A(Fx, a) & \xrightarrow{K} & A'(KFx, Ka) & \xrightarrow{(\sigma x)^*} & A'(F'Hx, Ka) \\ {\scriptstyle \varphi}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \varphi'} \\ X(x, Ga) & \xrightarrow[H]{} & X'(Hx, HGa) & \xrightarrow[(\tau a)_*]{} & X'(Hx, G'Ka) \end{array}$$

最後の条件を随伴の単位元や余単位元を用いて様々な方法で表現し，σ および τ の一方が他方を定めることを証明せよ．($H = K =$ 恒等函手の場合はこのテキストで既に扱われている．)

5. (Palmquist)．H, K および演習問題 4 にある二つの随伴が与えられたとして，自然変換 $\alpha : F'HG \stackrel{\cdot}{\to} K$ および自然変換 $\beta : H \stackrel{\cdot}{\to} G'KF$ の間の全単射を求めよ．

8　随伴の合成

二つの連続する随伴は以下の意味で合成されて一つの随伴をなす．

定理 1 二つの随伴

$$\langle F, G, \eta, \varepsilon\rangle : X \rightharpoonup A, \qquad \langle \overline{F}, \overline{G}, \overline{\eta}, \overline{\varepsilon}\rangle : A \rightharpoonup D$$

が与えられているとき，その合成函手からある随伴

$$\langle \overline{F}F, G\overline{G}, G\overline{\eta}F \cdot \eta, \overline{\varepsilon} \cdot \overline{F}\varepsilon\overline{G}\rangle : X \rightharpoonup D$$

が得られる．

証明 hom 集合と共に，与えられた二つの随伴から，$x \in X$ と $d \in D$ について自然な同型の合成

$$D(\overline{F}Fx, d) \cong A(Fx, \overline{G}d) \cong X(x, G\overline{G}d)$$

が得られる．これによって合成 $\overline{F}F$ は $G\overline{G}$ への左随伴となる．$d = \overline{F}Fx$ とし，これら二つの同型を恒等射 $1 : \overline{F}Fx \to \overline{F}Fx$ に適用すると，合成随伴の単位元が $x \xrightarrow{\eta x} GFx \xrightarrow{G\overline{\eta}Fx} G\overline{G}\overline{F}Fx$ となり，よって主張していた通り，$G\overline{\eta}F \cdot \eta$ となることがわかる．双対的な議論により，余単位元は $\overline{\varepsilon} \cdot \overline{F}\varepsilon\overline{G}$ になる．□

上記の最後の式が三角恒等図式を満たす自然変換 $I \xrightarrow{\cdot} G\overline{G}\overline{F}F$ および $\overline{F}FG\overline{G} \xrightarrow{\cdot} I$ を与えることを直接導くこともできる．

この合成を用いて，対象がすべての（小さな）圏 $X, A, D, \ldots$ であり，射が随伴 $\langle F, G, \eta, \varepsilon\rangle : X \rightharpoonup A$ であり，これらが上のように合成される圏 **Adj** を作ることができる．ここで，各圏 A に対する恒等射は恒等随伴 $A \rightharpoonup A$ である．

この圏は付加的な構造を持つ．各 hom 集合 $\mathbf{Adj}(X, A)$ は圏と見なすことができる．すなわち，直前の節で述べたような X から A への随伴の圏 $A^{(\mathrm{adj})X}$ と見なせる．その対象はこれらの随伴であり，射は共役対 $\langle \sigma, \tau\rangle$ で第 7 節の (8) で定義された「垂直な」合成を伴う．

定理 2 二つの共役対

$$\langle \sigma, \tau\rangle : \langle F, G, \eta, \varepsilon\rangle \xrightarrow{\cdot} \langle F', G', \eta', \varepsilon'\rangle : X \rightharpoonup A\ ,$$
$$\langle \overline{\sigma}, \overline{\tau}\rangle : \langle \overline{F}, \overline{G}, \overline{\eta}, \overline{\varepsilon}\rangle \xrightarrow{\cdot} \langle \overline{F}', \overline{G}', \overline{\eta}', \overline{\varepsilon}'\rangle : A \rightharpoonup D$$

が与えられたとき，(水平) 合成された自然変換 $\overline{\sigma}\sigma$ および $\tau\overline{\tau}$ から，合成随伴に対する自然変換の共役対 $\overline{\sigma}\sigma : \overline{F}F \dot{\to} \overline{F}'F', \tau\overline{\tau} : G'\overline{G}' \dot{\to} G\overline{G}$ が得られる．

証明は hom 集合による図式

$$\begin{array}{ccccc} D(\overline{F}'F'x, d) & \cong & A(F'x, \overline{G}'d) & \cong & X(x, G'\overline{G}'d) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle (\overline{\sigma}\sigma x)^*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (\sigma x)^*(\overline{\tau}d)_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (\tau\overline{\tau}d)_*} \\ D(\overline{F}Fx, d) & \cong & A(Fx, \overline{G}d) & \cong & X(x, G\overline{G}d) \end{array}$$

で視覚的に表すことができる．さらに，この（水平）合成の演算は双函手

$$\mathbf{Adj}(A, D) \times \mathbf{Adj}(X, A) \to \mathbf{Adj}(X, D) \tag{1}$$

になる．これは **Adj** が **Cat** のような「2 次元の」圏であることを意味する（第 II 章第 5 節を参照されたい）．

この先の話題が第 XII 章にある．

演習問題

1. 水平的な合成は，(1) にあるように，双函手であり，このことから共役対どうしの水平合成と垂直合成との間には交換律が言えることを証明せよ．
2. 忘却函手 $\mathbf{Rng} \to \mathbf{Set}$ を右随伴に持つ随伴は二通りの方法 $\mathbf{Rng} \to \mathbf{Ab} \to \mathbf{Set}$ および $\mathbf{Rng} \to \mathbf{Mon} \to \mathbf{Set}$ によって合成随伴として得られることを示せ．
3. R, S, T を環とする．
   (a) 双加群 ${}_RE_S$ について，$- \otimes_R E : \mathbf{Mod}_R \to \mathbf{Mod}_S$ は右随伴 $\hom_S(E, -)$ を持つことを示せ．
   (b) これはパラメータ $E \in R\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}S$ を持つ随伴であることを示せ．
   (c) この随伴と，同様の随伴 $\mathbf{Mod}_S \to \mathbf{Mod}_T$ との合成を書き表せ．

9　部分集合と特性関数

部分集合 $S \subset X$ の特性関数 (characteristic function) は X 上の 2 値関数 $\psi_S : X \to \{0, 1\}$ で

$$\psi_S x = 0 \ (x \in S \text{ のとき}); \quad \psi_S x = 1 \ (x \in X \text{ だが } x \notin S \text{ のとき}) \tag{1}$$

という値を取る．見方を変えれば，$\{0\} \subset \{0,1\}$ は最も単純な自明でない部分集合を表す．任意の部分集合 $S \subset X$ は ψ_S によって，定義したようにこの単純な部分集合に写すことができる．この写像は引き戻しの正方図式

$$
\begin{array}{ccc}
S & \longrightarrow & \{0\} \\
\downarrow & & \downarrow \\
X & \xrightarrow{\psi_S} & \{0,1\}
\end{array}
\tag{2}
$$

を生み出す．このような特性関数は証明可能性の理論の中でしばしば用いられる．つまり，論理学において，$\{0,1\}$ は 0 を「真」とする二つの「真偽値」による集合である．単射（定型的な部分集合）$t : \{0\} \to \{0,1\}$ は集合の圏に対する「部分対象分類子」と呼ばれている．

結果としては，他の圏における部分対象に対しても同様な分類子が存在する．一般には，終対象 1 を持つ圏 C の**部分対象分類子** (subobject classifier) は，C のすべての単射 m が一意的な方法で t の引き戻しとなるような単射 $t\colon 1 \rightarrowtail \Omega$ として定義される．言い換えると，各 m について一意的な引き戻しの正方図式

$$
\begin{array}{ccc}
S & \longrightarrow & 1 \\
{\scriptstyle m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t} \\
X & \xrightarrow{\psi} & \Omega
\end{array}
\tag{3}
$$

が存在する．結果として得られる引き戻しの正方図式 (3) において，一番上の水平方向の射は終対象 1 への一意的なマップであり，下側の水平方向の射は与えられた部分対象 S の「特性関数」の役割を果たす．一方で「普遍的な」単射 $t : 1 \to \Omega$ は「真」と呼ばれることもある．

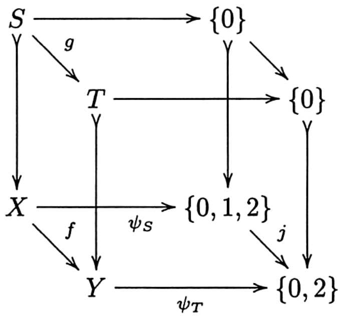
たとえば，C を関数 $f : X \to Y$ からなる圏として考える．ここで，単射 $g \rightarrowtail f$ は部分集合 $S \subset X$ および $T \subset Y$ の組の間の関数 $g : S \to T$ で，すべての $s \in S$ について $g(s) = f(s)$ を満たすとする．これは図式

$$
\begin{array}{ccc}
S & \xrightarrow{g} & T \\
\downarrow & & \downarrow \\
X & \xrightarrow{f} & Y
\end{array}
$$

が可換であることを意味する．この場合，X の元 x には三つの種類が存在する．一つは S に含まれるような x であり，二つ目は x は S には含まれないが fx は T に含まれるようなものであり，最後は，x は S に含まれず fx も T に含まれないようなものである．このとき三値の特性関数を

$$\psi_S x = 0 \quad (x \in S \text{ のとき}),$$
$$\psi_S x = 1 \quad (x \notin S \text{ だが } fx \in T \text{ のとき}),$$
$$\psi_S x = 2 \quad (fx \notin T \text{ のとき（よって } x \notin S \text{ でもある）})$$

とすることによって定義することができる．再びこの書き方から関数の圏における対象 $X \to Y$ と $j : \{0,1,2\} \to \{0,2\}$ の引き戻し



が得られる．ここで右側の関数 j は $j0 = 0$, $j1 = 0$, $j2 = 2$ によって与えられている．よって，この場合では，右側の埋め込み j は関数の圏に対する部分対象分類子になる．

部分対象分類子には他に多くの例が存在する．まず，射圏 (arrow category) $\mathbf{2}$ は二つのみの対象 0 および 1 と恒等射以外の射として $a : 0 \to 1$ のみを持つ圏であることを思い出そう[6]．このとき，従来の関数 f はある函手 $\mathbf{2} \to \mathbf{Set}$ と同じものである．よって，上では函手圏 $\mathbf{Set}^{\mathbf{2}}$ に対する部分対象分類子を構成したことになる．任意の圏 C について，函手圏 $\mathbf{Set}^{C}$ に対する部分対象分類子が存在する（見つけられたい！）．

---

[6]［訳注］原著では $\mathbf{2}$ と $C^{\mathbf{2}}$ を両方とも arrow category と呼んでいる．第 II 章では後者を C の射の圏（the category of arrows）と呼んでいるので，本書では前者を射圏，後者を（C の）射の圏と訳すことにする．

10　Set に似た圏

（初等）トポス (topos) は，以下の性質を満たす圏 E として定義される．

(i) E はすべての有限極限を持つ．
(ii) E は部分対象分類子を持つ．
(iii) E はカルテシアン閉である．

E がカルテシアン閉であることは，各函手「b との積」（つまり，$a \mapsto a \times b$）が E 内のすべての b について右随伴 $c \mapsto c^b$ を持つこと，よって

$$\hom(a \times b, c) \cong \hom(a, c^b)$$

を意味することを思い出されたい．言い換えれば，E は冪乗を持つ．

すべての（小さな）集合の圏 **Set** はトポスであり，小さな圏 C 上のすべての集合値反変函手からなる圏 $\mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$ もトポスである．また，そのような函手 $F : C^{\mathrm{op}} \mapsto \mathbf{Set}$ は前層とも呼ばれる．これは位相空間論に関連しており，そこで C は位相空間 X のすべての開集合 U の集合である．この場合，開集合 U からの連続写像 $U \to V$ に対する函手的な性質を用いて，前層 F は各開集合 U に集合 $F(U)$ を割り当てる．たとえば，$F(U)$ を U 上のすべての実数値連続関数の集合とすることもできる．この場合，F は（コホモロジー理論に関する係数の層のことを考えて！）層であると言われる．これやその他の層による圏は代数幾何や代数位相において中心的な役割を果たす．つまり,「トポス」という言葉は明らかに「トポロジー」という言葉の派生語であり，位相的な構造は **Set** の層からなるトポスによって本質的に記述されることを示唆している．

位相空間上の層の圏とその一般化に対する研究はトポスの研究を先導してきた（Mac Lane-Moerdijk [1992] を参照されたい）．特に，様々な論理学上の性質がトポスの部分対象分類子 Ω において反映されている．多くの状況のもとで，トポスは数学の基礎に対する従来とは違う見方を提供している．たとえば，連続体仮説の独立性を証明する「強制法」を利用することをトポス上の構成を用いてうまく組織化することができる（Mac Lane-Moerdijk [1992] の第 VI 章を参照されたい）．また，数学の基礎として，集合からなる圏を適

当なトポスに置き換えることもできる.

トポスに関する公理は多くの有益な結果を持つ．たとえば，すべてのトポスはすべての有限余極限を持つ.

注釈

本章や他の章にある随伴函手の多様な例は，随伴が数学の多くの分野のほとんど至るところに起こるということを示すのに役立っている．これらのすべての随伴を系統立てて用いることにより，これらの主題がはっきりと明確になるということが本書のテーゼである．しかしながら，函手の随伴対という概念が発展してきたのはごく最近に過ぎない.「随伴」という語は最初（ずっと昔に）ある線型微分作用素を記述するために現れてきたようである．1930 年前後にこの概念はヒルベルト空間 H に持ち込まれた．ここで，H 上の与えられた線型変換 T の随伴 T^* は，すべてのベクトル $x, y \in H$ についての内積の等値性

$$(T^*x, y) = (x, Ty)$$

によって定義される．明らかに，随伴函手の定義の形式的なアナロジーが存在する.

ダニエル・カンは，文献 Kan [1958] において随伴函手を認識して研究した最初の人であった．彼は，単体対象 (simplicial object) の研究のためにそれらを必要としていたのであり，単位元や余単位元，随伴としての極限，パラメータ付きの随伴，共役変換といった基本的性質と共に，重要な存在定理（カン拡張 —— 第 X 章を見られたい）を発展させた．彼の発見は普遍的構成の正確な定式化の 10 年後になされたことに注意されたい．当初，随伴のアイデアはゆっくりと広まり，普遍射との関係は明らかではなかった．ピーター・フレイドは（未出版だが広く回覧された）彼の 1960 年のプリンストンでの学位論文と彼の本 Freyd[1964] において，また Lawvere は文献 [1963, 1964] において随伴が主要な位置にあることを強調した．他の基本的な一般概念で未だに発見されていないものがあるかどうかを問うのも躊躇せざるを得ない.

随伴函手の発見がなぜそんなに遅れたのかについても推測することができる．ヒルベルト空間についてのアイデアや一般位相における普遍的構成が随伴を示唆してもよさそうなものだったが，そうはならなかった．おそらく 1939–45 年の戦争がこの発展を妨げたのだろう．次の 10 年の 1945–55 年の間は圏論の研究はほとんどなく，圏論は言葉に過ぎず，可能性のある研究者も,「一般的抽象的ナンセンス」（圏論）という広く行き渡った実用主義的な不信によってやる気を失っていたのかもしれない．ブルバキはわずかに的を外していた（[1948]，付録 III）．普遍的構成の彼の定義は不細工である．なぜなら，それは圏論的な言語を避けているのだが，結局のところ双函手

$W : X^{\mathrm{op}} \times A \to \mathbf{Set}$ を研究したり，各 x について $W(x, -)$ の普遍要素を求めているからである．これは結局のところ対象 $Fx \in A$ や自然同型 $W(x, a) \cong A(Fx, a)$ を求めていることになる．それは，$W(x, a) = \hom_X(x, Ga)$ として，函手 $G : A \to X$ への左随伴 F を見つけるという問題を含んでいる．また，$W(\langle A, B\rangle, C)$ を双線型写像 $A \times B \to C$ からなる集合として二つの加群 A と B のテンソル積を見つけるという問題も含んでいる．しかも，テンソル積 $A \otimes B$ は（我々の普遍射の例であるにもかかわらず）この方法では左随伴の例にはならない．言い換えれば，普遍的構成というブルバキのアイデアは，さらに多くのものを含むほどに —— そして特に，フランス数学の伝統にとって重要である多重線型代数というアイデアを含むほどに —— 一般的なものとなるよう工夫が加えられた．振り返ってみると，この付加的な一般性は誤りであるように思われる．つまり，ブルバキの構成の問題は表現可能函手を強調しており，「$W(x, a) \cong A(Fx, a)$ を満たす Fx を求めよ」と問うていた．この定式化は「$W(x, Ga) \cong A(Fx, a)$ を満たす Fx を求めよ」といった随伴の問題が持つ対称性に欠けている —— そしてそれゆえ基本的な発見を見逃したのである．この問題は，より若い，おそらく伝統や流行にとらわれない人達に残された．見方を変えると，よい一般理論は最大の一般性ではなく正しい一般性を探求するのである．

第V章　極限

本章では，極限の構造と性質および極限と随伴との関係について述べる．この関係は随伴函手に対する基本的な存在定理の中で用いられる．そしてこの定理は様々な場合における普遍射や随伴を与えるものである．この章の締めくくりとして，位相幾何学における随伴函手の応用についていくらか述べる．

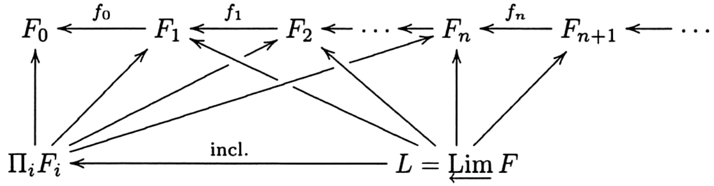
1　極限の創出

圏 C が**小完備** (small complete) である（通常単に**完備** (complete) と言う）とは，C におけるすべての小さな図式が C の中に極限を持つこと，つまり任意の小さな圏 J に対してすべての函手 $F : J \to C$ が極限を持つことである．**Set**, **Grp**, **Ab** その他多くの代数系の圏が小完備であることを後で示す．

Set における極限の構築は，函手 $F : \omega^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ に対する極限を考えることにより説明できる．ここで ω，つまりすべての有限な順序数からなる線形順序集合は，以下のグラフ

$$\{0 \to 1 \to 2 \to 3 \to \cdots\}$$

によって生成される自由圏である．函手 $F : \omega^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ は，以下の図式の上側の並びのような，集合 F_n と関数 f_n からなる並びに他ならない．



(1)

$$\{x_0, x_1, \ldots \mid x_n \in F_n\} \hookleftarrow \{x_0, x_1, \ldots \mid f_n x_{n+1} = x_n \in F_n\}.$$

F が与えられたとして，まず直積集合 $\Pi_i F_i$ を作る．この集合は要素のすべての列 $x = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ からなり，各 n に対して $x_n \in F_n$ を満たす．そして，この集合は射影関数 $p_n : \Pi_i F_i \to F_n$ を持つが，p_n, p_{n+1} および f_n から作られる三角形が可換になるとは限らない（つまり $f_n p_{n+1} \neq p_n$ もあり得る）．極限は少なくとも可換な三角図式の集まり（錐）の頂点でなくてはならない．そこで，$\Pi_i F_i$ の部分集合で，f に「適合する」列 x，つまりすべての n に対して $f_n x_{n+1} = f_n$ を満たす列 x からなる集合 L を取る．このとき，関数 $\mu_n : L \to F_n$ が $\mu_n x = x_n$ によって定義される．x が f に適合することから，任意の n に対して $f_n \mu_{n+1} = \mu_n$ が成り立つ．よって $\mu : L \xrightarrow{\cdot} F$ は頂点 $L \in \mathbf{Set}$ から底面 F への錐となる．もし $\tau : M \xrightarrow{\cdot} F$ が集合 M を頂点とする別の任意の錐ならば，各 $m \in M$ から適合する列 $\{\tau_n m\}$ が決まり，そこから $gm = \{\tau_n m\}$ つまり $\mu g = \tau$ となる関数 $g : M \to L$ が決まる．このような関数 g は一意的に決まるので，μ は F への普遍的な錐となり，L が F への極限集合であることがわかる．

「適合する」列 x は，一点集合 $*$ から F への錐 $x : * \xrightarrow{\cdot} F$ と同じものである．そのため，上記の極限 L を，すべてのそのような錐の集合 $L = \mathrm{Cone}(*, F)$ として表すことができる．(ω^{op} のところに）任意の圏を当てはめた場合でも，同様の構築を適用することができる．

定理 1　（**Set** の完備性）．J を小さな圏とすると，任意の函手 $F : J \to \mathbf{Set}$ は極限を持ち，その極限は一点集合 $*$ から F へのすべての錐 $\sigma : * \xrightarrow{\cdot} F$ の集合 $\mathrm{Cone}(*, F)$ となる．その極限錐 ν は

$$\nu_j : \mathrm{Cone}(*, F) \to F_j\ , \qquad \sigma \mapsto \sigma_j \tag{2}$$

と表され，任意の j に対して ν_j は各錐 σ を要素 $\sigma_j \in F_j$ に写す関数となる．

たとえば，J が離散的ならば，J の錐からなる集合 $\mathrm{Cone}(*, F)$ はカルテシアン積 $\Pi_j F_j$ に他ならない．

証明 J は小さな圏なので，$\mathrm{Cone}(*, F)$ は小集合であり，したがって **Set** の対象となる．$u : j \to k$ を J の任意の射とすると，σ は錐なので $F_u \sigma_j = \sigma_k$ となる．よって上記の (2) によって定義される ν は F を底面とする錐となる．これが普遍的であることを示すために，何らかの集合 X から F への他の任意の錐 $\tau : X \dot{\to} F$ を考える．このとき，各 $x \in X$ に対して，τx は一点集合から F への錐である．よって，各 x を τx に写す関数 $h : X \to \mathrm{Cone}(*, F)$ が存在し，これが $\nu_j h = \tau_j$ $(j \in J)$ を満たす唯一の関数となる． □

この証明で重要な部分は，上記の $\tau \mapsto h$ によって与えられる（自然な）全単射

$$\mathrm{Cone}(X, F) \cong \mathbf{Set}(X, \mathrm{Cone}(*, F)) \tag{3}$$

である．錐は自然変換に他ならないので，これは随伴

$$\mathrm{Nat}(\Delta X, F) \cong \mathbf{Set}(X, \mathrm{Cone}(*, F))$$

として表すことができる．このことから，極限の定義そのものによって，$\mathrm{Lim}\, F \cong \mathrm{Cone}(*, F)$ が示される．

Grp およびその他の圏における極限も，全く同様の方法によってすべての錐の集合から構築することができる．たとえば，$F : \omega^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Grp}$ とすると，(1) で図示したように，それぞれの F_n は群となり，すべての錐（すべての適合する列 x）の集まり L もまた要素ごとの乗法 (pointwize multiplication) $((xy)_n = x_n y_n)$ に関して群をなす．さらに $x \mapsto x_n$ を満たす射影関数 $\mu_n : L \to F_n$ は群の準同型となり，$\mu : L \dot{\to} F$ は **Grp** における極限錐となる．

p 進整数 (p-adic integer) の集まり $\mathbf{Z}_p$（ここで p は素数）を用いて，この構成について説明しよう．各 n に対して，F_n が $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ つまり p^n を法とする剰余環であり，$F_{n+1} \to F_n$ がカノニカルな射影 $\mathbf{Z}/p^{n+1}\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ であるような，$F : \omega^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Rng}$ を考える．このとき $\mathbf{Z}_p = \varprojlim F$ が存在する．$\mathbf{Z}_p$ の要素 λ は $*$ から F への錐である．つまり，λ は整数からなる列 $\lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \ldots\}$ で，すべての n について $\lambda_{n+1} \equiv \lambda_n \pmod{p^n}$ を満たすものとして表される．ここで，すべての n について $\lambda_n \equiv \lambda'_n \pmod{p^n}$ のと

き，$\lambda = \lambda'$ が成り立つ．二つの p 進整数 λ および μ は，以下の式

$$(\lambda + \mu)_n = \lambda_n + \mu_n, \qquad (\lambda\mu)_n = \lambda_n \mu_n$$

によって,「項ごとに」加えたり掛けたりすることができる．これらの演算によって $\mathbf{Z}_p = \mathrm{Lim}\, F$ は環，つまり p 進整数からなる環となり，この記述によって $\mathbf{Z}_p$ は完全に決まる．この記述は古典的なものよりも簡潔である．古典的な記述では，最初に $\mathbf{Z}$ における p 進付値（さらには位相も）を定義して，それから各 p 進整数 λ がその位相におけるコーシー列によって表されることを確かめるのである．

形式的冪級数環 (formal power series ring) も極限として記述することができる（演習問題 7）．

ここで再び，**Top** において，各対象 F_n として円 S^1 を取り，各射 $f_n : S^1 \to S^1$ としてドメインとなる円 S^1 をコドメインとなる円のまわりに一様に n 回巻き付ける連続関数を取る．このとき，逆極限の集合 L にすべての関数 $\mu_n : L \to S^1$ が連続となるために必要な開集合を導入するだけで，L は位相空間になる．この L は **Top** における極限空間であり，p 進ソレノイド (p-adic solenoid) として知られている．

ここで群についての一般的な構成について述べる．

定理 2 $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ を忘却函手とする．函手 $H : J \to \mathbf{Grp}$ に対して，もし合成 UH が極限 L を持ち，さらに **Set** において極限錐 $\nu : L \dot{\to} UH$ を持つならば，集合 L 上に一意的な群の構造が存在して，錐 ν のすべての射 $\nu_j : L \to UH_j$ が群の準同型になり，さらにこの群 L は ν を極限錐として持つ H の極限となる．

証明　定理 1 により，$L = \mathrm{Cone}(*, UH)$ とできる．ここで，二つの錐 $\sigma, \tau \in \mathrm{Cone}(*, UH)$ の積を $(\sigma\tau)_j = \sigma_j \tau_j$（群 H_j における積）によって定義し，逆元を $(\sigma^{-1})_j = \sigma_j^{-1}$（$H_j$ における逆元）によって定義する．これらの定義は L を群にし，ν の各要素を群の準同型にする．逆に，$\tau \mapsto \tau_j$ によって与えられる ν がすべての j に対して群の準同型となれば，$\sigma, \tau \in L$ の積は必然的に上記の式によって定義される．

ここで G を任意の群とし，$\lambda : G \dot{\to} H$ を（各 $j \in J$ における群の準同型 $\lambda_j : G \to H_j$ からなる）**Grp** 上の任意の錐とすると，$U\lambda : UG \dot{\to} UH$ は **Set** における錐であり，そのため，普遍性によりある一意的な関数 $h : UG \to L$ が存在して $U\lambda = (U\nu)h$ を満たす．G の任意の二つの要素 g_1 および g_2 に対して，

$$(h(g_1g_2))_j = \lambda_j(g_1g_2) = (\lambda_jg_1)(\lambda_jg_2) = (hg_1)_j(hg_2)_j = ((hg_1)(hg_2))_j$$

を満たす．つまり，λ が群の準同型（の集まり）なので，h も群の準同型となり，よって L はまさに **Grp** における極限となる．□

この議論は，群のカルテシアン積あるいは p 進数の集まりやその他のものにおける乗法を項ごとに構築するという，よく知られた構築を形式化したものに他ならない．この定理の結果から，U を用いた一意的な方法によって **Set** における極限から **Grp** における極限が構成される．同様の議論から，**Set** への忘却関数 U を用いることにより，**Rng**, **Ab**, R-**Mod** および類似の代数の圏におけるすべての小極限が構成されるだろう．言い換えれば，それぞれの忘却函手は以下の意味で極限を「創出」する．

定義 1 函手 $V : A \to X$ が函手 $F : J \to A$ の極限を**創出する** (create) とは，

(i) X における任意の極限錐 $\tau : x \dot{\to} VF$ に対して，$Va = x$ を満たす対象 $a \in A$ および $V\sigma = \tau$ を満たす錐 $\sigma : a \dot{\to} F$ からなる二つ組 $\langle a, \sigma \rangle$ が唯一存在して，しかも，

(ii) この錐 $\sigma : a \dot{\to} F$ が A における極限錐となる．

同様に,「V が積を創出する」(上記の J が離散的であると制限された場合),「V が有限極限を創出する」(上記の J が有限の場合)，あるいは「V が余極限を創出する」(上記におけるすべての錐の射が逆向きになる場合）を定義することができる.「V が極限を創出する」というのは，函手 F でその合成 VF が既に極限を持つような F に対する極限を V が導き出すことを意味するに過ぎないことに特に注意されたい．

この術語で表せば，定理 2 は次のようになる．

定理 3 忘却函手 $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ は極限を創出する．

演習問題

1. コンマ圏の射影 $(x \downarrow C) \to C$ は極限を創出することを示せ．
2. **Comp Haus** $\subset$ **Top** をすべてのコンパクトハウスドルフ空間からなる充満部分圏とすると，忘却函手 **Comp Haus** $\to$ **Set** は極限を創出することを示せ．
3. 任意の圏 X に対して，X におけるすべての射 $f : x \to y$ を二つ組 $\langle x, y\rangle$ に写す射影 $X^2 \to X \times X$ は極限を創出することを示せ．
4. すべての有限集合からなる圏は**有限完備** (finitely complete) である（つまり，すべての有限極限を持つ）ことを示せ．
5. **Cat** は小完備であることを示せ．
6. すべての p 進整数 λ は，$a_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ を満たす整数 a_i からなる列を用いて，各 $\lambda_n \equiv a_0 + a_1 p + \cdots + a_{n-1} p^{n-1} \pmod{p^n}$ によって定められることを示せ．p 進整数の加法および乗法は無限の「進数」$\ldots a_n \ldots a_0$（p を基底とし，左向きに無限に伸びていく進数）に対する通常の加法と乗法に対応することを示せ．
7. $K[x]$ を可換環 K の要素を係数に持つ x の多項式からなる通常の環とする．また，$F : \omega^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Rng}$ を自明な射影を用いて $F_n = K[x]/(x^n)$ により定義する．ただし (x^n) は通常の主イデアル（単項イデアル）である．このとき，$\mathrm{Lim}\, F$ が K の要素を係数に持つ x の形式的冪級数からなる環となることを示せ．
8. 集合からなる圏は余完備であることを示せ．

2　積とイコライザによる極限

函手 $F : J \to \mathbf{Set}$ の極限をすべての錐の集合

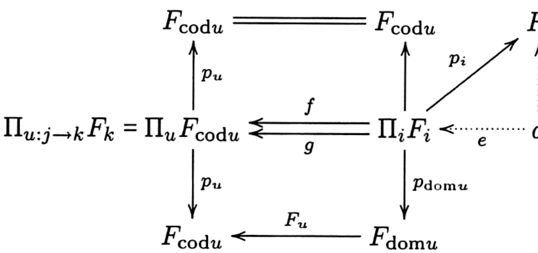
$$\mathrm{Cone}(*, F) \subset \Pi_j F_j$$

として構築することは二つのステップによって行われる．各錐 σ は射影 p_j を持つ積 $\Pi_j F_j$ の元 x である．その積の元 x が錐であることを求めるのは，J における任意の射 $u : j \to k$ に対して $(Fu)x_j = x_k$ となることを要求するに等しい．これは x が $(Fu)p_j$ と $p_k : \Pi_j F_j \to F_k$ のイコライザの中にあることを要求するのに相当する．任意の圏におけるこの手順の一般形をここに示そう．

定理 1　圏 C および J に対して，もし C がすべての射の二つ組に対するイコライザと集合 $\mathrm{obj}(J)$ および $\mathrm{arr}(J)$ を添字集合に持つすべての積を持つなら

ば，C はすべての函手 $F : J \to C$ に対する極限を持つ．

証明は各段階において以下の図式を構築する．ここで i は対象を表し，$u : j \to k$ は圏 J の射を表す．仮定によって，積 $\Pi_i F_i$ および $\Pi_u F_k$ とそれらの射影が存在する．ここで二番目の積は J のすべての射 u の上で作られており，各射 u に対する積としての項は u のコドメインの F による値 $F_k = F_{\mathrm{cod}\,u}$ である．$\Pi_u F_k$ は積なので，ある一意的な f が存在してすべての u に対して上側の四角形が可換になり，ある一意的な g が存在してすべての u に対して下側の四角形が可換になる．仮定より，



(1)

f と g のイコライザ e が存在する．これと各 i における射影 p_i の合成から射 $\mu_i = p_i e : d \to F_i$ が得られる．e は f と g をイコライズしており二つの四角形は可換なので，任意の $u : j \to k$ に対して $F_u \mu_j = \mu_k$ が得られる[1]．よって $\mu : \Delta d \stackrel{\cdot}{\to} F$ は頂点 d から底面 F への錐である．もし τ が任意の他のこのような錐であり頂点 c を持つならば，その写像 τ_i を組み合わせて上記の積への一意的な写像 $h : c \to \Pi_i F_i$ を得る．さらに τ は F への錐であり，[c から積 $\Pi_u F_{\mathrm{cod}\,u}$ への条件を満たす射の一意性から] $fh = gh$ が成り立つ．よって h は e を通じて一意的に分解され，それゆえ錐 τ は錐 μ を通じて一意的に分解される．このことにより，d および錐 μ が F の極限を与えることが示せた．はっきりさせておくと，**Set** の場合と同様に以下が成り立つ．

定理 2 （積とイコライザによる極限，つづき）．$F : J \to C$ の極限は $f, g : \Pi_i F_i \to \Pi_u F_{\mathrm{cod}\,u}$ ($u \in \mathrm{arr} J$, $i \in J$) のイコライザ e である．ただし，すべては (1) のように，$p_u f = p_{\mathrm{cod}\,u}$, $p_u g = F_u \circ p_{\mathrm{dom}\,u}$ となり，極限錐 μ は任意の $j \in J$ に対して $\mu_j = p_j e$ を満たす．

---

[1] ［訳注］本書ではしばしば引数の適用 Fu が F_u と書かれている．

この定理は有益な結果や特別な場合をいくつか持つ．

系 3 もし圏 C が終対象，すべての射の二つ組に対するイコライザ，およびすべての対象の二つ組に対する積を持つならば，C はすべての有限極限を持つ．

ここで**有限極限** (finite limit) とは，J を有限な圏としたときの $J \to C$ に対する極限のことである．

系 4 もし C がすべての射の二つ組に対するイコライザとすべての小さな積を持つならば，C は小完備である．

たとえば，このことは **Set** が小完備であることに対する別証明を与える．

完備性の概念は主として大きな圏や前順序において有用である．前順序 P において，対象の集まり a_j, $j \in J$ の積を d とすると，すべての j に対して $d \leqq a_j$ となり，またすべての j に対して $c \leqq a_j$ を満たす任意の c に対して $c \leqq d$ となる．言い換えると積は要素 a_j の**最大下界** (greatest lower bound) またはミート (meet) に他ならない（双対として，余積は**最小上界** (least upper bound) またはジョイン (join) である）．

命題 5 （フレイド）．小完備な小さな圏 C は単に前順序である．その前順序はその要素からなるすべての小さな集合に対する最大下界を持つ．

証明 C が前順序でないとする．このときある対象 $a, b \in C$ に対して射 $f \neq g : a \to b$ が存在する．任意の小集合 J に対して，要素 b_j がすべて b と等しい積 $\Pi_j b$ を作る．このとき射 $h : a \to \Pi_j b$ は a から b へのそれぞれの射によって決まり，それらは f や g にもなり得る．よって a から $\Pi_j b_j$ への射は少なくとも 2^J 個は存在する．ここでもし小さな集合 J が $\mathrm{arr}C$ よりも大きな濃度を持てば，矛盾である．□

演習問題

1. (Manes). C における平行な射の対 $f, g : a \to b$ が共通左逆射 (common left inverse) h を持つとは，ある射 $h : b \to a$ が存在して $hf = 1 = hg$ となることを言う．

(a) すべての小さな積と共通左逆射を持つすべての平行対に対するイコライザを持つ圏 C は小完備であることを示せ.（ヒント：定理 1 の証明の中で用いられた平行対は実際には共通左逆射を持つ.）

(b) **Set** において，射の平行対 $f, g : X \to Y$ が共通右逆射を持つとき，かつそのときに限り，対応する関数 $(f, g) : X \to Y \times Y$ が対角線 $\{\langle y, y\rangle | y \in Y\}$ を含む像を持つことを示せ.

2. C_1 と C_2 が完備（あるいは余完備）ならばその積圏 $C_1 \times C_2$ も同様であることを示せ.

3. （函手としての $\varprojlim$ および $\varinjlim$）. $F, F' : J \to C$ が極限錐 μ, μ'（あるいは余極限錐 ν, ν'）を持つとき，任意の自然変換 $\beta : F \dot{\to} F'$ は，以下の図式が可換になるような射 $\varprojlim \beta$ あるいは $\varinjlim \beta$ を一意的に定めることを示せ. ここで $\Delta : C \to C^J$ は対角函手である.

$$\begin{array}{ccccc}
\Delta(\varprojlim F) & \xrightarrow{\ \mu\ } & F & \xrightarrow{\ \nu\ } & \Delta(\varinjlim F) \\
{\scriptstyle \Delta(\varprojlim \beta)}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \beta} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Delta(\varinjlim \beta)} \\
\Delta(\varprojlim F') & \xrightarrow{\ \mu'\ } & F' & \xrightarrow{\ \nu'\ } & \Delta(\varinjlim F')
\end{array}$$

以下を結論付けよ：もし C が完備（あるいは余完備）ならば，射 $\varprojlim$（あるいは $\varinjlim$）は C^J から C への函手である.

4. （合成の極限）. 合成可能な函手

$$J' \xrightarrow{W} J \xrightarrow{F} C \xrightarrow{H} C'$$

と F の極限錐 ν および HFW の極限錐 ν' が与えられたとして，$\Delta_{J'}(Hc) = H \circ \Delta_J c \circ W \ : \ J' \to C'$ を確かめ，ある一意的な「カノニカルな」射 $t : H \circ \varprojlim F \to \varprojlim HFW$ が存在して以下の図式が可換になることを示せ.

$$\begin{array}{ccccc}
\Delta_{J'}(H \circ \varprojlim F) & \xrightarrow{\ H\nu W\ } & HFW & \xrightarrow{\ \mu'\ } & \Delta_{J'}(\varinjlim HFW) \\
{\scriptstyle \Delta_{J'}(t)}\Big\downarrow & & \Big\| & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Delta_{J'}(s)} \\
\Delta_{J'}(\varprojlim HFW) & \xrightarrow{\ \nu'\ } & HFW & \xrightarrow{\ H\mu W\ } & \Delta_{J'}(H \circ \varinjlim F)
\end{array}$$

双対的に，矢印が右向きの場合に成り立つような $s : \varinjlim HFW \to H \circ \varinjlim F$ を構成せよ.

5. （C におけるすべての図式からなるコンマ圏上の函手としての極限）.

(a) 演習問題 4 の W を $(\mathbf{Cat} \downarrow C)$ の射として解釈し,（C が完備であるとして）$\varprojlim$ が函手 $(\mathbf{Cat} \downarrow C)^{\mathrm{op}} \to C$ であることを示せ.

(b) $(\mathbf{Cat}\ddot{\downarrow}C)$ を，$F : J \to C$ を対象として持ち，函手 $W : J' \to J$ および自然変換 $\beta : FW \dot{\to} F'$ からなる組 $\langle \beta, W\rangle : F' \to F$ を射として持つ（「超コンマ」）

圏とする．演習問題 3 と 4 を組み合わせて（C が完備であるとして）Lim が函手 $(\mathbf{Cat}\downarrow C)^{\mathrm{op}} \to C$ であることを示せ．また，その双対化をせよ．

3　パラメータ付き極限

$T : J \times P \to X$ を双函手とし,「パラメータ」p である任意の値 $p \in P$ に対して $T(-,p) : J \to X$ が極限を持つとする．このとき，すべての p に対するこれらの極限はある函手 $P \to X$ の対象関数 $p \mapsto \mathrm{Lim}_j T(j,p)$ をなす．

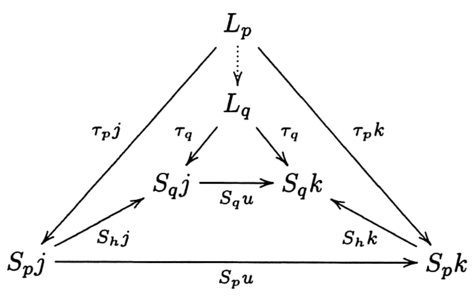
このことを直接証明する代わりに，函手 $P \to X$ を函手圏 X^P の対象に置き換える．これによって，随伴 $\mathbf{Cat}(J \times P, X) \cong \mathbf{Cat}(J, X^P)$ のもとで，$T : J \times P \to X$ がその随伴射 $S : J \to X^P$ に置き換わる．各対象 $p \in P$ に対して「p で評価する (evaluate)」函手 $E_p : X^P \to X$ が存在して，X^P の射（自然変換）$\sigma : H \dot{\to} H'$ に対して

$$E_p H = Hp, \qquad E_p\sigma = \sigma_p : Hp \to H'p \tag{1}$$

となることを思い出そう．

定理 1　$S : J \to X^P$ は，各対象 $p \in P$ に対して合成 $E_pS : J \to X$ が極限 L_p と極限錐 $\tau_p : L_p \dot{\to} E_pS$ を持つことを満たすとする．このとき，対象関数 $p \mapsto L_p$ を持つ一意的な函手 $L : P \to X$ が存在して，$p \mapsto \tau_p$ が自然変換 $\tau : \Delta L = \Delta_J L \dot{\to} S$ になる．さらに，この τ は頂点 $L \in X^P$ から底面 $S : J \to X^P$ への極限錐である．

証明　$h : p \to q$ を P の任意の射とする．このとき，E_pS を S_p と書くと，与えられた錐 τ_p と τ_q は J の典型的な射 $u : j \to k$ に対して以下の図式をなす．



τ_p と τ_q は錐なので三角形の部分は可換であり，S は函手なので四角形の部分も可換である．内側の三角形は普遍的なので一意的な射 $L_h : L_p \to L_q$ が存在してすべての $j \in J$ に対して $\tau_q j \circ L_h = S_h j \circ \tau_p j$ を満たす．この割り当て $h \mapsto L_h$ は L を函手にする（証明：図式の外側にさらに一つの錐をおいて考えればよい）．さらに τ は自然変換 $\Delta L \dot{\to} S$ （対象 $L \in X^P$ から函手 $S : J \to X^P$ への錐）となる．この錐は極限錐である．つまり，$\sigma : M \dot{\to} S$ を任意の他の錐とすると，L_p が極限であるため，一意的な射 $M_p \to L_p$ が存在する．よって，それらの射を組み合わせて一意的な自然変換 $M \dot{\to} L$ が得られる． □

この結果は以下のように表すことができる．

$$E_p(\varprojlim S) = \varprojlim(E_p S)$$

函手圏においては，極限は（各項ごとに極限が存在するならば）**項ごとに計算することができる．**

系 2 X が小完備ならば，すべての函手圏 X^P も小完備である．

P のすべての対象と恒等射からなる離散部分圏を $|P|$ で表せば，この定理は極限のある種の「創出」になる．

定理 3 任意の圏 X および P に対して，包含函手 $i : |P| \to P$ から極限を創出する函手 $i^* = X^i : X^P \to X^{|P|}$ が得られる．

4 極限の保存

函手 $H : C \to D$ が函手 $F : J \to C$ の**極限を保存する** (preserve the limit) とは，函手 F についての C におけるすべての極限錐 $\nu : b \dot{\to} F$ から，H との合成によって D における極限錐 $H\nu : Hb \dot{\to} HF$ が得られることである．これは，H が C の中に存在する任意の極限対象を D における極限対象に写すだけでなく，H が極限錐を極限錐に写すことも要求している．ある函手がすべての小極限を保存するとき，その函手は**連続** (continuous) であると言う．

定理 1 小さな hom 集合を持つ任意の圏 C に対して，各 hom 函手 $C(c,-)$: $C \to \mathbf{Set}$ はすべての極限，特に，すべての小極限を保存する．

同様の証明によって，次のより一般的な結果が与えられる．**Ens** を集合からなる任意の圏で $\mathbf{Ens}(X,Y)$ が X から Y へのすべての関数となるようなものとする．もし C の hom 集合が **Ens** の対象ならば，各 hom 函手 $C(c,-): C \to \mathbf{Ens}$ は C で存在するすべての極限を保存する．

証明 J を任意の圏とし，$F: J \to C$ は C における極限錐 $\nu: \operatorname{Lim} F \dot{\to} F$ を持つ函手とする．hom 函手 $C(c,-)$ を適用すると，結果的に図のような **Set** における錐 $\nu_* = C(c,\nu)$ が得られる．

$$\begin{array}{ccc} C(c,\operatorname{Lim} F) & \xrightarrow{\nu_{*i}} & C(c,F_i), \quad i \in J \\ \uparrow{\scriptstyle k} & & \| \\ X & \xrightarrow{\tau_i} & C(c,F_i) \end{array}$$

集合 X を頂点に持ち，同じ底面を持つ他の任意の錐 τ に対して，各要素 $x \in X$ は C における錐 $\tau_i x: c \to F_i$ を与え，それゆえ，ν は普遍的なので一意的な射 $h_x: c \to \operatorname{Lim} F$ が存在して $\nu_i h_x = \tau_i x$ を満たす．そこで各 x について $kx = h_x$ とおくことである関数 k が定義され，それゆえ k は上図のようにすべての i について $\nu_{*i} k = \tau_i$ を満たす **Set** の射となる．k はこの性質を満たす唯一のものであることは明らかであり，よって ν_* は **Set** における極限錐となり，求めるものが得られた． □

別の言い方をすれば，同じ証明を次のような書き方で始めることもできるだろう．すなわち函手 $C(c,F-): J \to \mathbf{Set}$ の定義は，C における錐 $\lambda: c \dot{\to} F$ が，点 $*$ を頂点に持つ **Set** における錐 $\lambda: * \dot{\to} C(c,F-)$ と同じものであることを示している．このとき，第 1 節の (3) と同様に $\operatorname{Cone}(X,-) \cong \mathbf{Set}(X, \operatorname{Cone}(*,-))$ が成り立つので，

$$\begin{aligned} \operatorname{Cone}(X, C(c,F-)) &\cong \mathbf{Set}(X, \operatorname{Cone}(*, C(c,F-))) \\ &= \mathbf{Set}(X, \operatorname{Cone}(c,F)) \cong \mathbf{Set}(X, C(c, \operatorname{Lim} F)) \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで “Cone” は J 錐を意味しており最後の部分は $\operatorname{Lim} F$ の定義を用いている．しかし，各 $S: J \to \mathbf{Set}$ に対して $\operatorname{Lim} S$ は随伴 $\operatorname{Cone}(X,S) \cong$

$\mathbf{Set}(X, \mathrm{Lim}\, S)$ によって定義される．それゆえ上記の式はこの $\mathrm{Lim}\, S$ を（正しい極限錐と一緒に）

$$\mathrm{Lim}\, C(c, F-) \cong C(c, \mathrm{Lim}\, F) \tag{1}$$

によって決めている．

この式を用いて，**Set** における極限を使って C における極限を定義する研究者もいる．たとえば，C における対象 a_i の積は

$$\prod_i C(c, a_i) \cong C(c, \prod_i a_i) \tag{2}$$

によって定義される．

反変 hom 函手は

$$C(-, c) = C^{\mathrm{op}}(c, -) : C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$$

と書くことができるので，先の定理はこの函手 $C(-, c)$ が C における小余極限（およびその余極限錐）をそれに対応する **Set** での極限および極限錐に写すことを示している．たとえば，小さな余積の定義は（余積から積への）同型

$$C(\textstyle\coprod_j a_j, c) \cong \displaystyle\prod_j C(a_j, c)$$

を与える．より一般的には，任意の $F : J \to C$ の余極限は

$$C(\mathrm{Colim}\, F, c) \cong \mathrm{Lim}\, C(F-, c) \tag{3}$$

によって定められる．

創出と保存性は以下のように関連している．

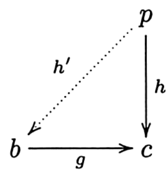
定理 2 もし $V : A \to X$ が $F : J \to A$ の極限を創出し，合成 $VF : J \to X$ が極限を持つならば，V は F の極限を保存する．

特に，V がすべての小極限を創出し，X が小完備ならば，A もまた小完備であり，V は連続である．

証明 $\tau : a \dot{\to} F$ および $\sigma : x \dot{\to} VF$ を，それぞれ A および X における極限錐とする．V は極限を創出するので，A において一意的な錐 $\varrho : b \dot{\to} F$ が

存在して $V\varrho : Vb \dot{\rightarrow} VF$ は $\sigma : x \dot{\rightarrow} VF$ に等しく，しかも ϱ は極限錐である．しかし極限は同型を除いて一意的なので，同型射 $\theta : b \cong a$ が存在して $\tau\theta = \varrho$ を満たす．よって $V\theta : Vb = x \cong Va$ と $V\tau \circ V\theta = V\varrho = \sigma$ が成り立ち，Va は極限となり，V は極限を保存する．これが示したいことであった．　□

任意の圏において，ある対象 p からのすべての射 $h : p \to c$ とすべてのエピ射 $g : b \to c$ に対して $h = gh'$ を満たす h' が存在するとき p は**射影的** (projective) と呼ばれる．



このことは，g がエピならば $\hom(p, g) : \hom(p, b) \to \hom(p, c)$ が **Set** におけるエピ射であることを要求するのと同値である．言い換えれば，$\hom(p, -)$ がエピ射を保存するとき，かつそのときに限り p は射影的になる．双対的に，$\hom(-, q)$ がモニック射をエピ射に写すとき対象 q は**入射的** (injective) であると言う．これらの概念は R-**Mod** およびその他の Ab-圏において特に有益である．R-**Mod** において射影的対象は自由加群の直和になる．

演習問題

1. 連続な函手の合成は連続であることを示せ．
2. C が完備で，$H : C \to D$ がすべての小さな積とすべての（平行対の）イコライザを保存するならば H は連続であることを示せ．
3. 各集合 X を X で生成された自由アーベル群に写す函手 F : **Set** → **Ab** は連続でないことを示せ．
4. 任意の小さな集合 X に対して，函手（X との積）$X \times -$: **Set** → **Set** はすべての余極限を保存することを示せ．
5. （極限の保存.）$H : C \to C'$ および函手 $F : J \to C$ が与えられていて F および HF が極限を持つとき，H が F の極限を保存することの必要十分条件は第2節の演習問題4のカノニカルな射 $H \circ \varprojlim F \to \varprojlim HF$ が同型であることを示せ（これは，圏 C および C' の両方に特定の極限が与えられているときに極限

の保存を表す自然な書き方である）．

5 極限に付随する随伴

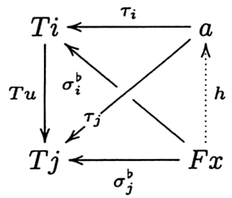
随伴に関する最も有益な性質の一つは次のものである．右随伴となる函手はそのドメインに存在するすべての極限を保存する．

定理 1 もし函手 $G : A \to X$ が左随伴を持ち，一方で函手 $T : J \to A$ が A において極限錐 $\tau : a \dot{\to} T$ を持つならば，GT は X において極限錐 $G\tau : Ga \dot{\to} GT$ を持つ．

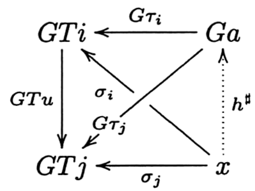
証明 合成により，$G\tau$ は X における頂点 Ga からの錐に他ならない．もし F が G への左随伴函手で，錐 $\sigma : x \dot{\to} GT$ のすべての射に随伴同型を適用すれば，$i \in J$ に対して射 $(\sigma_i)^\flat : Fx \to Ti$ が得られ，これらの射は A における錐 $\sigma^\flat : Fx \dot{\to} T$ をなす．しかし $\tau : a \dot{\to} T$ は A における T への錐に対して普遍的なので，一意的な射 $h : Fx \to a$ が存在して $\tau h = \sigma^\flat$ を満たす．再度随伴関係を用いれば，一意的な射 $h^\sharp : x \to Ga$ が得られて $G\tau \cdot h^\sharp = (\tau h)^\sharp = (\sigma^\flat)^\sharp = \sigma$ が成り立つ．射 $h^\sharp$ の一意性は $G\tau : Ga \dot{\to} T$ が普遍的であることをまさに示している． □

この証明は以下の図式で説明できる（ここで $u : i \to j$ は J の任意の射）．

A における図式



X における図式



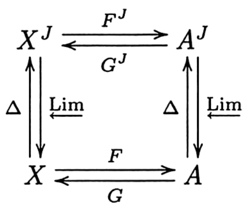
この証明はまた，Lim が対角函手 Δ への右随伴であるという事実を用いることにより，より洗練された形に書き直すことができる．実際，随伴

$$\langle F, G, \eta, \varepsilon \rangle : X \rightharpoonup A$$

および添字圏 J が任意に与えられたとき，（J からの）函手圏が作られ，それから図式

$$\langle F^J, G^J, \eta^J, \varepsilon^J \rangle : X^J \rightharpoonup A^J$$

で，任意の函手 $S : J \to X$ に対して $F^J(S) = FS$ となり，$\eta^J S = \eta S : S \dot{\to} GFS$ が成り立ち，その他いくつかの条件が成り立つものが得られる．η と ε に対する三角恒等図式から η^J と ε^J に対する同じ三角恒等図式が得られるので，二番目の図式はまさに随伴である（要するに，随伴はこのような函手圏でも成り立つ）．ここで随伴の組からなる図式



が得られる．対角函手 Δ の定義から直ちに $F^J \Delta = \Delta F$ が示せるので，左随伴からなる図式はこのような四角図式について可換である．随伴の合成は随伴なので，合成 $\varprojlim \circ G^J$ と $G \circ \varprojlim$ は両方とも $F^J \circ \Delta = \Delta \circ F$ の右随伴である．与えられた函手に対する右随伴は自然同型を除いて一意的なので，ここで $\mathrm{Lim} \circ G^J \cong G \circ \mathrm{Lim}$ が示せた．これは再び，任意の函手 $T : J \to A$ とその極限 a （および A における極限錐 $\tau : a \dot{\to} T$）に対して $Ga = G\,\mathrm{Lim}\,T = \mathrm{Lim}\,G^J(T) = \mathrm{Lim}\,GT$ を導く．同じ議論から G が極限錐を保存することが証明できることを読者に確かめてほしい（上記の四角図式の中に単位元と余単位元をおき，極限錐 $\tau : a \dot{\to} T$ が随伴 $\langle \Delta, \mathrm{Lim}, \ldots \rangle : A \rightharpoonup A^J$ の余単位元の函手 T 上の値に他ならないことを思い出されたい）．

この定理の双対も同様に有益である．右随伴函手を持つ（つまり，左随伴である）函手 P は余極限（余積，コイコライザ，その他）を保存しなければならない．このことは二つの自由群の余積（自由積）が再び（生成元からなる集合の直和上の）自由群となることの理由を説明している．

同様に（もとの定理によって）代数におけるすべての典型的な忘却函手が積，核，イコライザおよびその他のタイプの極限を保存する．典型的な例では，二つの代数系（群，環，その他）の積は，その基底集合としてちょうど

二つの基底集合の（カルテシアン）積を持つ．このことや他の同様の事実は，この一つの（簡単な）定理の直接の結果である．また，この定理はある種の函手が随伴を持たないことを示すために用いられることもある．

演習問題

1. 固定された集合 X に対して，X が一点集合でない限り，函手 $X \times - : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ は左随伴を持ち得ないことを示せ．
2. 第 IV 章第 2 節 (2) の函手 $D : \mathbf{Vct}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Vct}$ について，D は右随伴を持たない（よって，特に，D^{op} の左随伴ではない）ことを示せ．
3. C が小完備な圏 D の充満な反映的部分圏ならば，C は小完備であることを示せ．
4. $\mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$ はカルテシアン閉でないことを示せ．

6 フレイドの随伴函手定理

与えられた函手の左随伴の存在に関する基本的定理を定式化するために，圏における始対象が存在する場合をまず考え，さらに左随伴の単位元によって定義された各普遍射が適当なコンマ圏における始対象となるという事実を用いる．

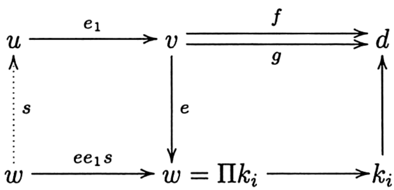
定理 1 （始対象の存在）．D を小さな hom 集合を持つ小完備な圏とする．このとき D が始対象を持つことの必要十分条件は以下の性質が成り立つことである．

解集合条件．小さな集合 I および I を添字集合とする D の対象の族 k_i が存在して，任意の $d \in D$ に対してある $i \in I$ について D の射 $k_i \to d$ が存在する．

証明 この解集合 条件は必要である．つまり，もし D が始対象 k を持てば，常に（一意的な）射 $k \to d$ が存在するので，一点集合によって添字付けされた k は条件を満たす．

逆に，解集合条件を仮定する．D は小完備なので，与えられた I を添字集合とする族に対する積対象 $w = \Pi k_i$ を含む．各 $d \in D$ に対して少なくとも

一つの射 $w \to d$ が存在する．たとえば，合成 $w = \Pi k_i \to k_i \to d$ がそうである．ここで始めの射は積の射影である．仮定により，w の自己射の集合 $D(w,w)$ は小さな集合で D は完備であるので，w のすべての自己射の集合のイコライザ $e : v \to w$ を取ることができる．各 $d \in D$ に対して，$v \to w \to d$ によって少なくとも一つの射 $v \to d$ が存在する．二つの射 $f, g : v \to d$ が存在すると仮定して，それらのイコライザ e_1 を以下の図のように取る．



w の作り方から，ある射 $s : w \to u$ が存在し，合成 ee_1s は 1_w のような w の自己射となる．しかし e は w のすべての自己射のイコライザとして定義されているので，

$$ee_1se = 1_we = e1_v$$

が成り立つ．ここで，e はイコライザだからモニックであり，そのため左側の e を消去して $e_1se = 1_v$ が得られる．これは f と g のイコライザ e_1 は右逆元を持つことを言っている．任意のイコライザと同様に，e_1 はモニックなので，e_1 は同型射である．それゆえ，$f = g$ が成り立つ．この結果は v が D における始対象であることを意味する．□

この証明は第X章第2節で改めて定式化される．

定理 2 （フレイドの随伴函手定理）．小さな hom 集合を持つ小完備な圏 A が与えられたとき，函手 $G : A \to X$ が左随伴を持つことの必要十分条件は G がすべての小極限を保存して以下の条件を満たすことである．

解集合条件．各対象 $x \in X$ に対してある小さな集合 I および I を添字集合とする射 $f_i : x \to Ga_i$ の族が存在して，すべての射 $h : x \to Ga$ はある添字 i とある $t : a_i \to a$ により合成射 $h = Gt \circ f_i$ として書き表せる．

証明　G が左随伴 F を持っているのならば，G はその定義域 A の中に存在するすべての極限，特にすべての小極限を保存しなくてはならない．さらに，

随伴の単位元である普遍射 $\eta_x : x \to GFx$ は，I を一点集合として考えれば，x についての解集合条件を満たす．

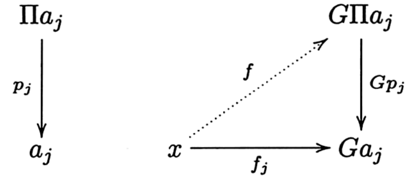
逆に，これらの条件が与えられたとして，各 $x \in X$ から G への普遍射 $x \to Ga$ を構成すれば十分である．このとき各点ごとの随伴の構成によって G は左随伴を持つ．この普遍射はコンマ圏 $(x \downarrow G) = D$ の始対象となるので，この圏に対して直前の定理の条件が成り立つことを示せば十分である．G に対する解集合条件は明らかに $(x \downarrow G) = D$ に対する解集合条件を与えている．A は小さな hom 集合を持つので，D もそうである．D が小完備であることを示すためには，D における任意の小さな積および平行対のイコライザの存在を示せば十分である．それらは以下の補題によって作られる．[つまり，以下の補題によって，この定理の証明が完了する.] □

補題 3 $G : A \to X$ がすべての小さな積（または，すべてのイコライザ）を保存するとき，各 $x \in X$ に対してコンマ圏の射影

$$Q : (x \downarrow G) \to A, \qquad (x \xrightarrow{s} Ga) \mapsto a$$

がすべての小さな積（または，すべてのイコライザ）を創出する．

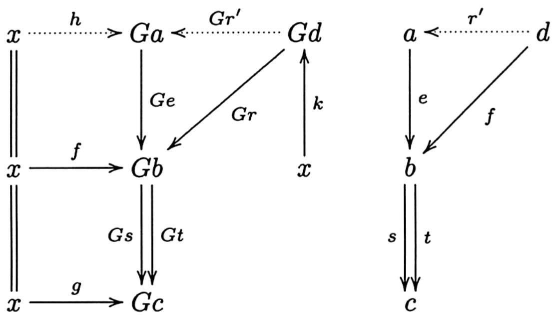
証明 J を集合（離散圏），$f_j : x \to Ga_j$ を J を添字集合とする $(x \downarrow G)$ の対象の族とし，A において積図式 $p_j : \Pi a_j \to a_j$ が存在したとする．G は積を保存するので，$Gp_j : G\Pi a_j \to Ga_j$ が X における積図式となり，X において一意的な射 $f : x \to G\Pi a_j$ が存在して任意の j に対して $(Gp_j)f = f_j$ を満たす．



この等式は $p_j : f \to f_j$ が $(x \downarrow G)$ における射の錐であることを述べている．実際，この錐は与えられた錐 $p_j : \Pi a_j \to a_j$ へと Q によって射影される $(x \downarrow G)$ における一意的な錐である．このとき，この錐 p_j が $(x \downarrow G)$ における積図式であることが示せる．これら二つの結果から Q が積を創出すること

が示せた．

同様に，$(x \downarrow G)$ における二つの射 $s, t : f \to g$ のイコライザを「創出」する．次の図式のように，Qs, Qt のイコライザ e，つまり A における射としての s と t のイコライザが与えられたとする．G はイコライザを保存するので，Ge は Gs と Gt のイコライザである．しかし $Gs \circ f = g = Gt \circ f$ なので，一意的な射 $h : x \to Ga$ が存在して次の図のように $Ge \circ h = f$ をなす．言い換えれば，$(x \downarrow G)$ における $e : h \to f$ は，Q による射影が $e : a \to b$ となる $(x \downarrow G)$ の一意的な射である．



後は，射 e が $(x \downarrow G)$ におけるイコライザであることを示せばよい．$(x \downarrow G)$ における別の対象 $k : x \to Gd$ を考え，$(x \downarrow G)$ の射 $r : k \to f$ が $(x \downarrow G)$ において $sr = tr$ を満たすとする．このとき A においても $sr = tr$ が成り立つので，A においてある一意的な射 r' が存在して $r = er'$ を満たす．後は r' が $(x \downarrow G)$ の射 $k \to h$ になることを示せばよい．しかし $Ge(Gr' \circ k) = G(er') \circ k = Gr \circ k = f$ なので，h が一意的に選ばれることから，$Gr' \circ k = h$ が成り立ち，このことは r' が $(x \downarrow G)$ の射であることを述べている．　□

上記の議論の方針は積やイコライザだけでなく，**任意の**極限を創出するのにも適用できる（演習問題 1）．

定理 4（表現可能性定理）．D を小さな hom 集合を持つ小完備な圏とする．函手 $K : D \to \mathbf{Set}$ が表現可能であるための必要十分条件は，K がすべての小極限を保存して以下の条件を満たすことである．

解集合条件．D の対象からなる小さな集合 S が存在して任意の対象 $d \in D$ と任意の元 $x \in Kd$ に対して $s \in S$, $y \in Ks$ および射 $f : s \to d$ が存在して

$(Kf)y = x$ が成り立つ.

証明 これは始対象に対する存在定理 1 を別の形で言い換えたものである. 実際, K の表現は一点集合 $*$ から K への普遍射である (第 III 章第 2 節命題 2) . これはコンマ圏 $(* \downarrow K)$ の中の始対象でもある, というのも K が連続であることを仮定しているので $(* \downarrow K)$ は小完備であるからである. 逆に, K が表現可能ならば, それは必然的に連続となる. □

解集合条件 (あるいはそれに似た条件) は三つの定理のすべてにおいて要求されている. たとえば, **Ord** をすべての小さな順序数 $\alpha, \beta, \ldots$ からなる順序集合とする. このとき **Ord** は, hom 集合 $\mathbf{Ord}(\alpha, \beta)$ が $\alpha > \beta$ のときは空集合で, $\alpha \leqq \beta$ のときは一点集合であるような圏となる. 順序数からなる任意の小さな集合の積はそれらの最小上界となるので, 圏 $\mathbf{Ord}^{\mathrm{op}}$ は小完備である. $K\alpha = *$, すなわちすべての α を一点集合に写す函手 $K : \mathbf{Ord}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ は明らかに連続である. しかしながら K は表現可能ではない. 実際, ある β に対して $K\alpha \cong \mathbf{Ord}^{\mathrm{op}}(\beta, \alpha)$ ならば, すべての α に対して $\alpha \leqq \beta$ となり, β は最大の小順序数となる. これはあり得ないことが知られている.

完備ブール代数は, 何らかの解集合条件が必要であることを示すための, もう一つの例を与える. 与えられた可算集合 D に対して, 任意の大きさを持つ完備ブール代数を D から生成して構成することができる (Solovay [1966]). このことから, D から生成される自由完備ブール代数は存在しない, よって, 忘却函手 $\mathbf{Comp\ Bool} \to \mathbf{Set}$ は, それが連続でありかつ **Comp Bool** が小完備であるにも拘わらず左随伴を持たない, ということがわかる.

随伴函手定理は多くのことに応用できる.

たとえば, その定理から忘却函手 $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ に対する左随伴が得られる. 実際, U はすべての極限を創出し (第 1 節定理 3) , **Grp** は小完備で U は連続であるということが既に知られている. よって, 各 $X \in \mathbf{Set}$ に対する解集合を見つければよい. 群 G に対する任意の関数 $f : X \to UG$ を考え, $x \in X$ に対応するすべての元 fx によって生成される G の部分群 S を考える. このとき, S のすべての元は生成元またはその逆元からなる有限な積, たとえば $(fx_1)^{\pm 1}(fx_2)^{\pm 1} \cdots (fx_n)^{\pm 1}$ である. よって S の濃度は与えられた X によって制限される. そのため, そのような群 S の各同型類から

代表元を一つずつ取ることにより群の小さな集合が得られ，よってすべての関数 $X \to US$ の集合が解集合となる．

この左随伴 $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Grp}$ は各集合 X に X から生成される自由群 FX を割り当てるので，我々の定理は，FX の元に対する通常の（かなりこまごまとした）X の文字からなる語の同値類としての明示的な構成を用いることなく，その自由群を作ることができる．確かに，通常の構成は普遍射 $X \to UFX$ が単射である（X の異なる元は自由群の生成元としても異なる）ことも示している．しかし，一般的議論と，二つの異なる元 $h \neq k$ を持つ群 H が存在するということから，我々も上記の事実を得ることができる．実際，このときは X の任意の二つの元 $x \neq y$ に対して関数 $f : X \to UH$ で $fx = h$ かつ $fy = k$ を満たすものを取ればよい．f は普遍射 $X \to UFX$ を通じて分解されるので，この普遍射は単射であることが言える．

この構成は $\mathbf{Grp}$ だけでなく，与えられた型 τ を持つすべての小さな代数系からなる圏に対しても適用される．**代数系** (algebraic system) の型 τ は，演算子からなる集合 Ω と恒等式からなる集合 E によって与えられる．演算子の集合 Ω はある**次数付き集合** (graded set) である．つまり，Ω は各要素 $\omega \in \Omega$ にある自然数 n を割り当てる関数を伴う集合である．このような自然数 n は ω の**アリティ** (arity) と呼ばれる．たとえば，アリティ 2 の演算子 ω は二項演算子で，アリティが 3 のものは三項演算子である．S を任意の集合とするとき，Ω の S への**作用** (action) とは，アリティ n の各演算子 ω に n 項演算 $\omega_A : S^n \to S$ を割り当てる関数 A のことである（ここで $S^n = S \times \cdots \times S$ は n 個の直積因子からなる積である）．与えられた演算子の集まり Ω から，すべての**導来演算子** (derived operator) の集合 Λ を次のようにして作る．アリティ n の ω と n 個の導来演算子 λ_1，…，λ_n でアリティがそれぞれ m_1，…，m_n のものが与えられているとき，自明な「合成」$\omega(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ はアリティ $m_1 + \cdots + m_n$ の導来演算子である．また，アリティ n の λ と $\{1, \ldots, n\}$ から $\{1, \ldots, m\}$ への任意の関数 $f : n \to m$ が与えられたとき，λ への f の「代入」はアリティ m の導来演算子 θ を与える．これは変数 x_i によって $\theta(x_1, \ldots, x_m) = \lambda(x_{f1}, \ldots, x_{fn})$ として記述される．(変数を用いたこの記述は，ある集合への Ω の作用を暗黙に参照している．代入と合成の抽象的な定式化については，Cohn [1965] あるいは Grätzer [1968] にあるような普遍代

数における標準的な扱いを参照されたい）．とにかく，集合 S への Ω の各作用 A は S への導来演算子の集合 Λ の作用へと一意的に拡張される．

型 τ の代数系に対する**恒等式** (identity) の集合 E とは導来演算子の順序対 $\langle\lambda,\mu\rangle$ の集合のことである．ここで λ と μ は同じアリティ n を持つ．Ω の S への作用 A が恒等式 $\langle\lambda,\mu\rangle$ を満たすとは，$\lambda_A=\mu_A:S^n\to S$ が成り立つことである．型 τ の代数 A —— $\langle\Omega,E\rangle$-代数 —— とは，ある集合 S のことであり，この集合は S への Ω の作用 A で E のすべての恒等式を満たすものを伴う．そのため，S を代数の**基底集合** (underlying set) と呼び，しばしば $|A|=S$ と書く．$\langle\Omega,E\rangle$-代数の写像 $g:A\to A'$ は基底集合上の関数 $g:S\to S'$ であり，Ω の（ひいては Λ の）すべての演算子を保存する．つまり，g は任意の $a_i\in A$ に対して

$$g\omega_A(a_1,\ldots,a_n)=\omega_{A'}(ga_1,\ldots,ga_n) \tag{1}$$

を満たす．すべての小さな $\langle\Omega,E\rangle$-代数の集まりと，射としてのこれらの写像によって，ある圏 $\langle\Omega,E\rangle$-**Alg** が定義される．この圏をしばしば**代数多様体** (variety of algebras) あるいは代数の**等式類** (equational class) と呼ぶ．この記述は **Grp**, **Rng**, **Ab** のような身近なものも含むし，他の多くのそれほど身近でないもの（たとえば，特殊なクラスの冪零群の集まり）も含む．たとえば，**Grp** を記述するためには，Ω の中の 3 個の演算子，すなわち積，逆元を取る演算子，そして単位元 e の割り当てという，それぞれアリティが 2, 1, 0 の演算子を取り，さらに E の中から，同値公理 $(ex=x=xe)$，逆元の公理 $(xx^{-1}=e=x^{-1}x)$，および結合公理を取ればよい．

任意の代数の代数多様体に対して，随伴函手定理から忘却函手 $\langle\Omega,E\rangle$-**Alg** $\to$ **Set** の左随伴が得られる．このときの解集合は群の場合と全く同様に得られる（後の第 7 節も参照されたい）．よって，この定理は，任意の集合 X に対して，X の元によって生成される自由環や自由アーベル群や自由 R-加群やその他のものを生み出す．一方，自由体は作られない．なぜなら，体を定義する際，乗法の逆元がすべてについては定義されていないので，体はここで考えている意味での代数系ではないからである（さらに言えば，自由体は存在しない）．

随伴函手定理に対する別の説明を，

$$V : \mathbf{Comp\ Haus} \to \mathbf{Set} \tag{2}$$

に対する左随伴の構成を通じて行ってみよう．ここで V は，各コンパクトハウスドルフ空間をそのすべての点からなる集合へと写すような忘却函手である．コンパクトハウスドルフ空間 X_i が与えられたとして，直積集合 $Y = \Pi_i VX_i$ 上の通常の積位相はハウスドルフかつコンパクトである（後者はティホノフの定理 (Tychonoff theorem) による）．よって **Comp Haus** はすべての小さな積を持ち，V はそれらを保存する．さらに言えば，V はこれらの積を創出する．つまり，この積位相は，すべての射影 $p_i : Y \to X_i$ を連続にするための最小限の開集合の集まりを伴うように選んであるので，他の任意のコンパクトな位相 Y' ですべての p_i が連続になるようなものは，同じ集合 Y に，より多くの開集合によって位相を入れたものとしても差し支えない．それゆえ，$\mathrm{id} : Y' \to Y$ はコンパクト空間からハウスドルフ空間への連続な単射となり，よって［Y' が **Comp Haus** における積のときは］同型射となる．同様の議論によって，V はすべてのイコライザ，よってすべての小極限を創出する．残りの作業は，各集合 S に対して射 $f : S \to VX$ による解集合（ここで各 X はコンパクトハウスドルフ空間である）を見つけることである．X を閉包 $\overline{fS} \subset X$ に置き換えることができるので，fS は X 上稠密であるとしてよい．各点 $x \in X$ に対して，集合 $Lx = \{D | D \subset S \text{ かつ } x \in \overline{fD}\}$ を考える．このとき Lx は S の部分集合からなる空でない集合である．互いに交わらない開集合 U と U' によって $x \neq x'$ が X において分離されているとき，$f^{-1}U \in Lx$ ではあるが $f^{-1}U$ は Lx' に含まれない．つまり $Lx \neq Lx'$ である．よって L は X から S の二重冪集合 $\mathcal{PP}S$ への単射 $X \to \mathcal{PP}S$ となる．$\mathcal{PP}S$ の部分集合 X の全体，各 X のすべての位相，およびすべての関数 $f : S \to VX$ を取れば，S の小さな解集合が得られる．よって，随伴函手定理から V に対する左随伴が得られる．この随伴は各集合 S に S 上の離散位相のストーン–チェックのコンパクト化を割り当てる．

演習問題

1. 連続な $G : A \to X$ に対して，射影 $(x \downarrow G) \to A$ はすべての小極限を創出することを示せ．
2. 随伴函手定理を用いて，忘却関数 **Rng** $\to$ **Set**, **Rng** $\to$ **Ab**, **Cat** $\to$ **Grph** の各々に対する左随伴函手を求めよ．これらの随伴に対する標準的かつ明示的な構成と比較せよ．
3. **Cat** における引き戻しの図式

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{H'} & A \\ {\scriptstyle G'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G} \\ X' & \xrightarrow{H} & X \end{array}$$

が与えられたとして，H が極限を創出し G が極限を保存するならば H' は極限を創出することを示せ．

4. 演習問題 3 および $(x \downarrow X) \to X$ が極限を創出することを用いて，演習問題 1 の結果に対する新たな証明を求めよ．

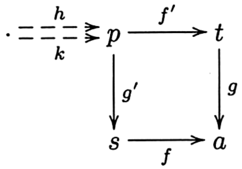
7　部分対象と生成子

これからは，部分環，部分空間および部分体のような概念を元の代わりに射を用いて圏論的に扱う．たとえば，群 G の部分群 S を，G の元による集合ではなく，埋め込みとして与えられる単射 $S \to G$ と見なす．

A を任意の圏とする．$u : s \to a$ と $v : t \to a$ が共通のコドメイン a を持つ二つのモニック射ならば，u が v を通じて分解される，つまり，ある射 u' に対して $u = vu'$ となるとき，$u \leqq v$ で表す（このとき u' も必然的にモニックになる）．$u \leqq v$ かつ $v \leqq u$ のときは $u \equiv v$ で表す．これによって，a をコドメインに持つモニック射どうしの同値関係 $\equiv$ が定義され，その関係に対応するこれらのモニック射の同値類は a の**部分対象** (subobject) と呼ばれる．モニック射 $u : s \to a$ は a の部分対象である，というような表現を取ること，つまり，ある可逆な射 $\theta : s' \to s$ に対して $v = u\theta$ となるようなすべての v からなる同値類と u とを同一視することは，しばしば便利である．**Rng**, **Grp**, **Ab** または R-**Mod** のようなよく知られた大きな圏においては，これらの部

分対象は（元を用いて定義される）通常の部分対象に対応している．しかし **Top** においては対応していない．

補題 1 任意の四角引き戻し図式



に対して，f がモニックならば f' もモニックである（また g がモニックならば g' もモニックである）．

要するに，モニック射の引き戻しはモニックである．

証明 射の平行対 h, k を図のように $f'h = f'k$ となるように取る．このとき $gf'h = gf'k$ となり，よって $fg'h = fg'k$ となる．f はモニックなので，このことから $g'h = g'k$ となる．しかし $f'h = f'k$ でもあるので，p が引き戻しであることから，$h = k$ が成り立つ．よって f' はモニックである． □

各 $a \in A$ のすべての部分対象からなる集合には二項関係 $u \leqq v$ によって半順序が付く．もし $u : s \to a$ と $v : t \to a$ が a の二つの部分対象であり，さらに A が引き戻しを持つならば，これら二つの射の引き戻しは（上記の補題による）a をコドメインに持つ別のモニック射 $w : p \to a$ で $w \leqq u$, $w \leqq v$ となるものを与える．それを $a \in A$ のすべての部分対象からなる半順序集合における部分対象 u および v の**共通部分** (intersection)（または**ミート** (meet) もしくは**最大下界** (greatest lower bound)）と呼ぶ．同様に，J が任意の集合で，各 $i \in J$ に対する $u_i : s_i \to a$ が J を添字集合とする $a \in A$ の部分対象からなる集合をなすとき，これらすべての射の引き戻しが，もし存在するのならば，a の部分対象 u_i の共通部分を与える．部分対象の**合併** (union)（または**ジョイン** (join) もしくは**最小上界** (least upper bound)）はある追加の仮定のもとで得られる．

双対的に，a をドメインに持つ二つのエピ射 r, s がある可逆な射 θ によって $r = \theta s$ を満たすとき，r と s は同値になる．このようなエピ射の同値類

は a の**商対象** (quotient object) となり，r が s を通じて分解されて $r = r's$ となるときに成り立つ関係 $r \leqq s$ によって半順序が付く．双対概念による商対象のこの定義は同値類による商代数に対する通常の定義よりも簡潔であり，しかもエピ射が全射であるような圏においては通常の定義と一致する．たとえば **Grp** においては，この後者の場合が成り立つ．それゆえ，**Grp** における群 G のすべての商対象は，G から G のある正規部分群 N による G の因子群 G/N への射影 $p : G \to G/N$ によって表される．さらに $G/M \leqq G/N$ であることの必要十分条件は $M \supset N$ である（一般に，商対象どうしの関係 $r \leqq s$ は r において「より多くのもの」が分割されることを意味する！）．

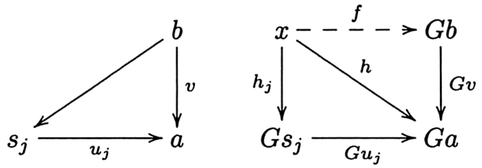
圏 C の対象からなる集合 S が C を**生成する** (generate) とは，C の射による任意の平行対 $h, h' : c \to d$ に対して，$h \neq h'$ ならば，ある $s \in S$ および射 $f : s \to c$ が存在して $hf \neq h'f$ を満たすことを言う.（「生成する」という言葉使いは整合的ではあるが上手な選択とは言えない.「分離する」の方がよかったであろう.）この定義は一つの対象 s が圏 C を生成するという場合も含む．たとえば，任意の一点集合は **Set** を生成し，$\mathbf{Z}$ は **Ab** や **Grp** を生成し，R は R-**Mod** を生成する．有限巡回群による集合はすべての有限アーベル群からなる（あるいは，すべてのねじれアーベル群からなる）圏を生成する．

双対的に，対象の集合 Q が圏 C の**余生成集合** (cogenerating set) であるとは，C の射によるすべての平行対 $h \neq h' : a \to b$ に対してある対象 $q \in Q$ およびある射 $g : b \to q$ が存在して $gh \neq gh'$ を満たすことを言う．一点の対象 q に対して，$\{q\}$ が余生成集合のとき q を**余生成子** (cogenerator) と呼ぶ．たとえば，任意の二点集合は **Set** の余生成子である．

部分対象によって解集合の構成をさらに試みることができる．任意の函手 $G : A \to X$ が与えられたとき，射 $f : x \to Ga$ が a をスパン (span) するとは，同型射でない A 上の単射 $s \to a$ で f が $Gs \to Ga$ を通じて分解されるようなものが存在しないことを言う．

補題 2 圏 A を考え，対象 $a \in A$ の部分対象からなる集合すべてに対して引き戻しが存在するとする．このとき，もし $G : A \to X$ がこれらの引き戻しをすべて保存するならば，すべての射 $h : x \to Ga$ は b をスパンするある射 $f : x \to Gb$ を通じて分解される．

証明　h が Gu_j を通じて分解されて $h = Gu_j \circ h_j$ となるようなすべての部分対象 $u_j : s_j \to a$ からなる集合を考える．このような u_j すべての引き戻し $v : b \to a$ を取る．このとき，可換図式



が示す通り $Gv : Gb \to Ga$ は（Gu_j に対する）引き戻しなので，図示されているように h は f を経由し Gv を通じて分解される．f が b をスパンしていることは構成の仕方からわかる．□

この補題は x の解集合として x からのスパンする射のすべての集合を考えればよいことを述べている．

応用として，与えられた型 τ の代数の圏を考えよう．射 $f : S \to GA$ が与えられているとき，代数 A は $f(S)$ の元にいくつかの演算子 $\omega \in \Omega$ を繰り返し適用して得られる元の全体からなる部分代数を持つ．よって，この部分代数 A_f の基数は S および Ω の基数によって制限される．f は $S \to GA_f$ を通じて分解されるので，これらの後者の射で集合 S をドメインに持つものは $G : \mathbf{Alg}_\tau \to \mathbf{Set}$ に対する解集合となるような小さな集合をなす．任意の対象 a の部分対象をモルフィズム $u : s \to a$ で Gu が $\mathbf{Set}$ において入射的であるものと再定義すれば，解集合をなすそれらの射は直前の補題の意味においてスパンしている射である．

この補題と随伴函手定理を応用したもう一つの例として，加群のテンソル積の存在の証明を考える．可換環 K の上の加群 A および B に対して，テンソル積はある第三の K-加群 C への双線型写像 $\beta : A \times B \to C$ からなる集合 $\mathrm{Bilin}(A, B; C)$ の普遍要素となる．この集合は C の函手（の対象関数）である．与えられた A と B に対する解集合を得るためには，それらの双線型写像 β で C をスパンするもの（C の真部分加群を通じて分解されないもの）だけを考えればよい．このとき C はすべての有限和 $\Sigma\beta(a_i, b_i)$ から構成され，したがって解集合条件を満たす．よって，K-$\mathbf{Mod}$ は小完備で $\mathrm{Bilin} : K\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Set}$ は連続なので，テンソル積 $\otimes : A \times B \to A \otimes B$ が存

在する．テンソル積のすべての性質は普遍性から直接に求められるので，通常の（より明示的な）構成は全く不要である．

演習問題

1. 随伴函手定理を用いて **Grp** における余積を構成せよ（**Grp** における余積 $G \amalg H$ は通常，**自由積** (free product) と呼ばれる）．積 $G \times H$ を用いて，余積への入射 $G \to G \amalg H$ および $H \to G \amalg H$ は共にモニックであること，さらに，それらの像は恒等部分群において交わることも示せ．
2. 環の余積に対して同様の構成を求めよ．
3. R を環とし，A を右 R-加群とし，さらに B を左 R-加群として，随伴函手定理を用いて $A \otimes_R B$ を構成せよ．(このテンソル積はアーベル群となり，双加法的な関数 $\langle a, b\rangle \mapsto a \otimes b \in A \otimes_R B$ を伴う．また，このテンソル積はすべての $a \in A$, $r \in R$ および $b \in B$ に対して $ar \otimes b = a \otimes rb$ を満たし，しかも，これらの性質に関して普遍的である.）$A \otimes_R B$ は元 $a \otimes b$ によって（アーベル群として）スパンされることを示せ．$S \to R$ が環の準同型写像であるとき，$A \otimes_S B$ と $A \otimes_R B$ の関係を調べよ．
4. 随伴函手定理を用いて，$\mathbf{Alg}_\tau$ におけるコイコライザを構成せよ．

8　特別な随伴函手定理

ここでは，余生成する対象からなる小集合を仮定して，解集合条件を用いない随伴に関する別の存在定理を考える．

定理 1　（特別な始対象定理）．圏 D が小完備で小さな hom 集合を持ち，さらに小さな余生成集合 Q を持つとする．このとき，各 $d \in D$ の部分対象からなるあらゆる集合に対して共通部分が存在すれば，D は始対象を持つ．

証明　小さな余生成集合 Q におけるすべての対象の積 $q_0 = \Pi_{q \in Q} q$ を考え q_0 のすべての部分対象の共通部分 r を取る．任意の対象 $d \in D$ に対して，射 $r \to d$ は高々一つである．なぜなら，もし異なる二つの射が存在すれば，それらのイコライザは同型射でない r へのモニック射となり，よって q_0 の部分対象が共通部分 r よりも小さくなるからである．

よって，r が D における始対象であることを示すためには，各 d に対して射 $r \to d$ を構成すれば十分である．そこで射 $h : d \to q \in Q$ の全体の集合 H および（小さな）積 $\Pi_{h \in H} q$ を考える．コンポーネントが h となる射 $j : d \to \Pi_{h \in H} q$ を取る（つまり，各射影 p_h に対して $p_h \circ j = h$ を満たす射 $j : d \to \Pi_{h \in H} q$ を取る）．Q は余生成集合だから j はモニックである．引き戻し

$$
\begin{array}{ccc}
c & \overset{j'}{\dashrightarrow} & \Pi_{q \in Q} q = q_0 \\
\vdots & & \downarrow{\scriptstyle k} \\
d & \xrightarrow{\ j\ } & \Pi_{h \in H} q
\end{array}
$$

を考える．ここで k は任意の $h : d \to q$ に対してコンポーネント $p_h \circ k = p_q$ が得られるような射である．このとき j' は，モニック射 j の引き戻しなので，モニックであり，よって c は q_0 の部分対象である．しかし r は q_0 のすべての部分対象の共通部分であり，よってある射 $r \to c$ が存在する．これらの合成 $r \to c \to d$ が求める射である．□

定理 2　（特別な随伴函手定理）．小完備で小さな hom 集合を持つ圏 A を考え，A は小さな余生成集合 Q を持つとする．さらに，各対象 $a \in A$ の部分対象からなるあらゆる集合に対して引き戻しが存在する（よって共通部分が存在する）とする．また圏 X が小さな hom 集合を持つとする．このとき，函手 $G : A \to X$ が左随伴函手を持つための必要十分条件は G がすべての小極限とモニック射の族のすべての引き戻しを保存することである．

証明　任意の右随伴函手は実際すべての極限（特に，すべての引き戻し）を保存するため，上記の条件の必要性が成り立つ．逆を証明するためには，通常通り，各 $x \in X$ に対してコンマ圏 $D = (x \downarrow G)$ の始対象を構成すれば十分である．この圏が始対象の構成に関する直前の定理の条件を満たすことを証明する．まず $(x \downarrow G)$ における部分対象が以下のような望ましい形態を持っていることを示す．

補題 3　コンマ圏 $(x \downarrow G)$ の射 $h : \langle f : x \to Ga, a \rangle \to \langle f' : x \to Ga', a' \rangle$ が

モニックであるための必要十分条件は，A における $h : a \to a'$ がモニックであることである．

証明　明らかに，$h : a \to a'$ がモニックならば $h : f \to f'$ もモニックである．逆を示したい．まず，h がモニックであることは，その核対 (kernel pair)（h と h の引き戻し）が $1_a, 1_a : a \rightrightarrows a$ であることに他ならない．一方で，第 6 節の補題により，コンマ圏の射影

$$(x \downarrow G) \to A, \qquad \langle f : x \to Ga, a \rangle \mapsto a$$

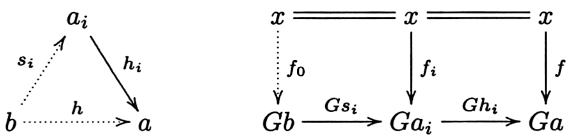
はすべての極限，特に核対を創出する．さらに，A はすべての核対を持つ．よって（第 4 節定理 2 により），このコンマ圏の射影はすべての核対，特に核対 $1_a, 1_a$ を保存し，その結果（$(x \downarrow G)$ の）モニック射は A のモニック射に写る．これで補題が示せた．□

定理の証明に戻ろう．A には小さな余生成集合 Q が与えられている．X は小さな hom 集合を持つので，$q \in Q$ による対象 $k : x \to Gq$ すべてからなる集合 Q' は小集合である．しかも，Q' は $(x \downarrow G)$ における余生成集合である．このことを以下に示す．$(x \downarrow G)$ において $s \neq t : \langle f : x \to Ga, a \rangle \to \langle f' : x \to Ga', a' \rangle$ が与えられたとき，ある $q_0 \in Q$ および射 $h : a' \to q_0$ が存在して $hs \neq ht$ を満たす．しかも，この h は射

$$h : \langle f' : x \to Ga', a' \rangle \to \langle f_0 : x \to Gq_0, q_0 \rangle$$

と見なすことができる．ただし $f_0 = Gh \circ f'$ である．さらに $(x \downarrow G)$ において $hs \neq ht$ を満たす．よって Q' は $(x \downarrow G)$ の余生成集合である．

A は小完備であり G は連続だから $(x \downarrow G)$ も小完備となるので，部分対象 $h_i : \langle f_i : x \to Ga_i, a_i \rangle \to \langle f_0 : x \to Ga, a \rangle$（ただし $i \in J$）からなる集合 $\{h_i\}_{i \in J}$ を任意に取り，これに対する $(x \downarrow G)$ における共通部分が構成できれば十分である．補題により，対応する射 $h_i : a_i \to a$ は A においてモニックである．よって仮定により，それらは A における引き戻し $h : b \to a$ を持つ．



函手 G は引き戻しを保存するので，$Gh = Gh_i \circ Gs_i$ となる $Gh : Gb \to Ga$ は X における Gh_i の引き戻しである．また，すべての $i \in J$ に対して $Gh_i \circ f_i = f$ なので，ある一意的な $f_0 : x \to Gb$ が存在して $f_i = Gs_i \circ f_0$ を満たす．よって，結果的に得られた射 $h : \langle f_0, b\rangle \to \langle f, a\rangle$ は $(x \downarrow G)$ における与えられた h_i の引き戻しである（ここもまた，コンマ圏の射影が引き戻しを創出することから導かれる）．この引き戻しが h_i の求める共通部分である．　□

この定理に対する別の表現がある．圏 A の各 $a \in A$ の部分対象の集合がある小さな集合を添字集合として持つとき，つまり，各 a に対してある小集合 J_a と J_a から a のすべての部分対象による集合への全単射が存在するとき，A は**ウェルパワード** (well-powered) であると定義する．多くのよく知られた大きな圏 —— **Top**, **Grp**, R-**Mod** など —— はウェルパワードである．これの双対概念は**コウェルパワード** (co-well-powered) と呼ばれる．もし A がウェルパワードかつ小完備ならば，$a \in A$ の部分対象による任意の集合は，通常の引き戻しによって作られる共通部分を持つ．よって特別な随伴函手定理は以下に特殊化される．

系 4　もし A が小完備かつウェルパワードで小さな hom 集合を持ち，しかも，小さな余生成集合を持つならば，小さな hom 集合を持つ圏 X に対して，函手 $G : A \to X$ が左随伴を持つことと G が連続であることは同値である．特に，任意の連続函手 $K : A \to \mathbf{Set}$ は表現可能である．

特別な随伴函手定理（*SAFT* (Special Adjoint Functor Theorem) と呼ばれることもある）のこの古典的な形は，（小さな hom 集合を持つ圏だけを考えるような状況のときは）しばしば「hom 集合が小さい」という仮定を明示しないで用いられる．何人かの著者は「ウェルパワード」を意味するときに「局所的に小さな圏」を用いる．また別の著者は「小さな hom 集合を持つ」を意味するときに「局所的に小さな圏」を用いる．だから我々はこの言葉を使わなかった！

SAFT の古典的な形は（Freyd [1964] p.89 または Schubert [1970] p.88 にあるように）随伴函手定理から解集合の構成によって直接導かれる．

典型例はコンパクトハウスドルフ空間 の全体による **Top** の充満部分圏の包含函手

$$G : \mathbf{Comp\ Haus} \subset \mathbf{Top} \tag{1}$$

である．既に述べたように，**Comp Haus** は小完備であり，また，小さな hom 集合を持つ．コンパクトハウスドルフ空間 X における任意の二点 $x \neq y$ に対して単位区間 I への連続関数 $f : X \to I$ が存在して $fx = 0$ かつ $fy = 1$ が成り立つ，というウリソンの補題 (Urysohn lemma) を考える．これから I は **Comp Haus** の余生成子であることが成り立つ．よって，特別な随伴函手定理は上記の包含函手 G の左随伴函手をもたらす．この左随伴函手（あるいは時として，この函手の完全正則空間による充満部分圏への制限）は**ストーン–チェックのコンパクト化**と呼ばれる．これは第 6 節で述べたような離散的な空間である場合も含む．

Watt の定理 [1960] は別の例となる．任意の環 R は圏 R-**Mod** の生成子であり，それゆえ $(R\text{-}\mathbf{Mod})^{\mathrm{op}}$ の余生成子である．このことから，R-**Mod** 上の **Ab** への任意の反変加法的函手 T で小余極限を極限に写すものは，ある R-加群 C による群同型 $T \cong \hom_R(-, C)$ によって表現可能である．実際，特別な随伴函手定理によって $T : (R\text{-}\mathbf{Mod})^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$ は左随伴函手 F を持ち，T は加法的なので，随伴

$$\mathbf{Ab}(G, TA) \cong \hom_R(A, FG), \qquad G \in \mathbf{Ab}, \qquad A \in R\text{-}\mathbf{Mod}$$

は加群の同型になる．ここで $G = \mathbf{Z}$ とすれば

$$TA \cong \mathbf{Ab}(\mathbf{Z}, TA) \cong \hom_R(A, F\mathbf{Z})$$

が得られる．

演習問題

1. $K : A \to \mathbf{Set}$ を任意の函手とする．もし K が左随伴を持てば，K は表現可能であることを証明せよ．逆に，もし A がすべての小さな余冪を持ち K がある $a \in A$ によって $K \cong A(a, -)$ と表現されるならば，K は（各集合 X に小さな余冪 $X \cdot a$ を割り当てる）左随伴を持つことを示せ．
2. A を左 R-加群，B を右 R-加群とし，G をアーベル群とする．

(a) 随伴

$$\hom_R(A, \hom_{\mathbf{Z}}(B, G)) \cong \hom_{\mathbf{Z}}(B \otimes_R A, G)$$
$$\cong \hom_R(B, \hom_{\mathbf{Z}}(A, G))$$

を求めよ．ここで $\hom_{\mathbf{Z}}(B, G)$ は適当な（左または右）R-加群の構造を持ち，$\hom_R$ は R-**Mod** における hom 集合を表し，$\hom_{\mathbf{Z}}$ は **Ab** における hom 集合を表す．

(b) 1 を法とする有理数による加群 $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ が **Ab** の入射的な余生成子であることが知られている．(a) を用いて $\hom_{\mathbf{Z}}(R, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ が R-**Mod** の入射的な余生成集合となることを示せ（第 4 節で定義された「入射的」対象を参照されたい）．

3. 演習問題 2(b) と特別な随伴函手定理を用いて任意の連続な加法的函手 T : R-**Mod** $\to$ **Ab** は表現可能であることを示せ. (Watt の定理)．

4. （ストーン–チェックのコンパクト化）X が完全正則位相空間であれば，(1) の左随伴に対する普遍射 $X \to GFX$ は単射であることを示せ. (次のウリソンの補題を用いよ．完全正則な X における $x \neq y$ に対してある連続写像 $f : X \to I$ が存在して $fx \neq fy$ が成り立つ．ここで I は単位区間を表す.）古典的な原典では，X が完全正則の場合でのみ，このコンパクト化が述べられている．この制限は必要ではない．実際，この制限は普遍射ではなく普遍単射のみを考えるという発想から生まれている．

9　位相空間論における随伴

Top はすべての（小さな）位相空間 $X, Y, \ldots$ を対象としすべての連続写像 $f : X \to Y$ を射とする圏である．その標準的な忘却函手（通常は名前のない孤児である！）

$$G : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$$

は X を X の点の集合 GX に写し，忠実であり，ある左随伴 D を持つ．その D は各集合 S に S 上の離散位相（つまり，S のすべての部分集合が開集合となる位相）に割り当てる．それゆえ G は **Top** の中に存在し得るすべての極限を保存する（このことは，空間の積の基底集合が各空間の基底集合のカルテシアン積であることの根拠になっている）．この忘却函手 G は右随伴函手 D' も持つ．その D' は各集合 S に S 上の密着位相（つまり，S と $\emptyset$ のみを開集合とする位相）を割り当てる．それゆえ G は **Top** の中に存在し得

るすべての余極限を保存する —— このことは二つの空間の余積が各空間の基底集合の直和上にある位相を入れることによって得られることの根拠になっている．

次に，ある集合 $S \subset GX$ 上の部分位相を考える．

X をある固定された位相空間とすると，G は函手

$$G \downarrow X : (\mathbf{Top} \downarrow X) \to (\mathbf{Set} \downarrow GX)$$

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \| \\ Y' & \xrightarrow{f'} & X \end{array} \quad \longmapsto \quad \begin{array}{ccc} GY & \xrightarrow{Gf} & GX \\ \downarrow{\scriptstyle Gh} & & \| \\ GY' & \xrightarrow{Gf'} & GX \end{array} \tag{1}$$

をもたらす．ここで f と f' はコンマ圏 $(\mathbf{Top} \downarrow X)$ の対象であり，h は $(\mathbf{Top} \downarrow X)$ の射である．この函手 $G \downarrow X$ はある右随伴 L を持つ．実際，$(\mathbf{Set} \downarrow GX)$ の対象 $t : S \to GX$ は集合 S および S 上の GX への関数 t からできている．S の上にある位相を入れる．その位相は X 上の開集合 U に対してすべての $t^{-1}U$ を S における開集合とすることにより得られる．結果としてできたこの空間を LS と呼ぶ．このとき t は連続写像 $Lt : LS \to X$ になる．(たとえば，もし S が GX の部分集合ならば，LS は S に通常の「部分空間位相」を入れたものに他ならない.) LS 上のこの位相は次のよく知られた普遍性を持つ．任意の連続写像 $f : Y \to X$ に対して，**Set** の中で t を通じて $Gf = t \circ s$ と分解されるとき，$s : Y \to LS$ は連続である．

$$\begin{array}{ccc} GY & \xrightarrow{Gf} & GX \\ \downarrow{\scriptstyle s} & & \| \\ S & \xrightarrow{t} & GX \end{array} \qquad Gf = t \circ s$$

この性質は求める随伴: $\hom(Gf, t) \cong \hom(f, Lt)$ の言い換えに他ならない．明らかに $(G \downarrow X) \circ L = \mathrm{Id}$ が成り立つので，L は $(G \downarrow X)$ への「右随伴右逆函手」となる．

部分集合 $S \subset GX$ 上の部分空間位相の普遍性は，X の他の部分空間だけではなく，他の空間 Y と任意の連続写像 $f : Y \to X$ で包含写像 $t : S \to GX$ を通じて分解されるもの（つまり，値域が部分集合 S に含まれるもの）にも

言及していることに特に注意されたい．

この随伴は以下の一般的な過程によって **Top** における（通常の）イコライザを構成する際にも用いることができる．

命題 1 $G : C \to D$ が忠実函手であり，D がイコライザを持ち，しかも，各 $x \in C$ に対して $(G \downarrow x) : (C \downarrow x) \to (D \downarrow Gx)$ が右随伴右逆函手 L を持つとき，C はイコライザを持つ．

証明　平行対 $f, f' : x \to y$ のイコライザを得るために，まず G を適用し，Gf と Gf' の D におけるイコライザ $t : s \to Gx$ を取り，それから L を適用する．このとき，随伴の普遍性から $Lt : Ls \to x$ が C におけるイコライザとなることがわかる．□

この議論は，イコライザの通常の定義で元について考えない場合に他ならない．実際，二つの連続写像 $f, f' : X \to Y$ が与えられたときは，X の点 x で $fx = f'x$ を満たすものからなる集合 S を取り，これに部分位相を入れればよい．この随伴はなぜ部分空間位相を考えるのかを説明している．

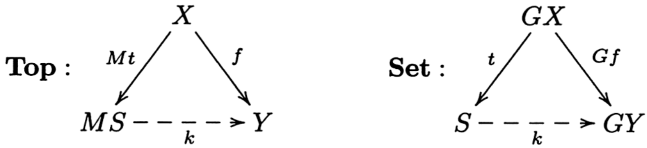
今日では **Top** が完備であることはよく知られている．これを証明するためには,（平行対の）イコライザと積の存在のみ確かめればよい．空間による任意の族 X_i, $i \in J$ の積は，基底集合の積 $\Pi G X_i$ を取り，それにすべての射影 $p_i : \Pi G X_i \to G X_i$, $i \in J$ が連続であるような（普遍）位相を入れることによって得られる．空間 X_i と集合 S，および関数 $t_i : S \to GX$ に対して，すべての t_i が連続となるような S 上の開集合をちょうど持つ「普遍」位相が存在する，という一般的事実は圏論的に表現することができる（演習問題 3）．

余極限は双対的な形で扱われる．任意の空間 X に対して函手

$$(X \downarrow G) : (X \downarrow \mathbf{Top}) \to (GX \downarrow \mathbf{Set})$$

は左随伴 M を持つ．実際，$(GX \downarrow \mathbf{Set})$ の対象は集合 S への関数 $t : GX \to S$ である．S の上にある位相を入れる．その位相による開集合はすべての部分集合 $V \subset S$ で $t^{-1}V$ が X における開集合となるようなものである．結果としてできたこの空間を MS と呼ぶ．（もし $t : GX \to S$ が全射ならば，これはよく知られた S 上の「商位相」あるいは「等化位相」になる.）よって関数

t は連続写像 $Mt : X \to MS$ になる．さらに，連続写像 $f : X \to Y$ がある関数 k に対して $Gf = k \circ t$ を満たすとき，$k : MS \to Y$ は連続となる．



よって $k \mapsto k$ は単位元が恒等写像となる随伴

$$(X \downarrow \mathbf{Top})(Mt, f) \cong (GX \downarrow \mathbf{Set})(t, Gf)$$

となり，よって M は $X \downarrow G$ の左随伴右逆函手となる．

　このとき，命題 1 は圏に対する公理のみによって証明されているので，その双対もまた正しい．この双対命題と上記の随伴から **Top** がコイコライザを持つことがわかる．

　同様の構成により **Top** における余積（= 直和）と一般的な余極限が得られる．そのような余極限はしばしば，通常は他の名前で，たとえば個々の部分を一緒に糊付けすることにより空間を構成する基本的な処理過程の中に現れる．たとえば，$\{U_i | i \in J\}$ を空間 X の開被覆とする．各連続写像 $f : X \to Y$ は J を添字集合に持つ制限 $f|U_i : U_i \to Y$ の族を決定する．逆に，J を添字集合に持つ連続写像 $f_i : U_i \to Y$ の族が X 全体における連続写像 f を決定するための必要十分条件は，任意の i および j に対して $f_i|(U_i \cap U_j) = f_j|(U_i \cap U_j)$ となることである，というよく知られた結果がある．この結果を，以下の図式

$$\mathbf{Top}(X, Y) \to \Pi_i \mathbf{Top}(U_i, Y) \rightrightarrows \Pi_{i,j} \mathbf{Top}(U_i \cap U_j, Y)$$

がイコライザであるという記述によって表現することができる．ここで射は上記にあるように制限によって与えられている．この結果は同様に，X が函手 $U : J' \to \mathbf{Top}$ の **Top** における余極限になる，という記述によって表すこともできる．ここで，その余極限錐は包含写像 $U_i \to X$ から成り，J' は添字の組 $\langle i, j \rangle$ および一つの添字 $\langle i \rangle$ を対象に持ち，（恒等射以外の）マップ $\langle i, j \rangle \to \langle i \rangle$, $\langle i, j \rangle \to \langle j \rangle$ を伴う圏である．また，U は $U\langle i, j \rangle = U_i \cap U_j$, $U\langle i \rangle = U_i$ を満たし，かつ（恒等射以外の）射を包含写像に写すような函手である．

別のコイコライザとして，空間 X から**部分集合** A を**潰して**一点にすることによって得られる空間 X/A が挙げられる．それは一点の空間 $*$ を一つの点 $a \in A$ に写すようなすべての射からなる集合のコイコライザ

$$* \;\overset{a}{\underset{a'}{\rightrightarrows}}\!\!\!\vdots\;\; X \longrightarrow X/A$$

である．これはホモトピー論で用いられる．対象が組 $\langle X, A\rangle$（A を部分集合に持つ空間 X）であり射 $\langle X, A\rangle \to \langle X', A'\rangle$ が A の元を A' へ写す連続写像 $X \to X'$ であるような圏 $\mathbf{Top}^{(2)}$ を考える．このとき，X/A の定義から，点付き位相空間 Y に対して

$$\mathbf{Top}_*(X/A, Y) = \mathbf{Top}^{(2)}(\langle X, A\rangle, \langle Y, *\rangle)$$

が得られる．よって $\langle X, A\rangle \mapsto X/A$ はそれぞれの点付き空間を二つ組 $\langle Y, *\rangle$ に写す函手 $Y \mapsto \langle Y, *\rangle$ の左随伴となる．

Top には多くのよく知られた部分圏が存在する．

命題 2 **Top** 中のすべてのハウスドルフ空間からなる充満部分圏 **Haus** は完備かつ余完備である．包含函手 **Haus** $\to$ **Top** は左随伴 H を持ち，忘却函手 **Haus** $\to$ **Set** も左随伴を持つ．

証明　随伴函手定理を用いて左随伴 H を得たい．まず，任意のハウスドルフ空間の積も任意のハウスドルフ空間の部分空間もハウスドルフ空間なので，**Haus** は完備であり包含函手は連続である（つまり，小極限を保存する）．よって，各位相空間 X に対する解集合条件を示せばよい．ところが X からハウスドルフ空間 Y への任意の連続写像は，その写像の像となる Y の部分空間，したがってそれはハウスドルフである，を通じて分解される．この像は X の商集合に何らかの位相を入れたものなので，ハウスドルフ空間 Y への（同相でない）全射 $X \to Y$ からなる高々小さな集合が存在する．これは解集合条件である．その結果得られた左随伴 H は各空間 X にハウスドルフ空間 HX および連続写像 $\eta\colon X \to HX$ を割り当てる．その連続写像は X からあるハウスドルフ空間への普遍射である．このとき η が普遍的であることから η が

全射となり，よって HX を X の「最も大きなハウスドルフ商」として記述することができる．もし X が既にハウスドルフ空間ならば，$HX = X$ かつ $\eta = 1$ とすることができる．よって H は包含函手の左随伴左逆函手である．

H は左随伴なので，これは余極限を保存する．このことから **Haus** がすべての小余極限を持つ（小余完備である）ことがわかる．特に，**Haus** における余積は **Top** における余積である（ハウスドルフ空間の余積はハウスドルフ空間だから）．一方，**Haus** におけるコイコライザは **Top** におけるコイコライザの最大のハウスドルフ商である． □

コンパクト生成ハウスドルフ空間からなる充満部分圏は，カルテシアン閉なので特に有用である（第 VII 章第 8 節を参照）．

演習問題

1. **Top** の中の局所連結空間 (locally connected space) からなる充満部分圏 **Lconn** に対して，各空間 X を X の連結な成分による集合に割り当てることにより，$D : \mathbf{Set} \to \mathbf{Lconn}$ が左随伴 C を持つことを示せ[2]．また一方で C は（イコライザにおける不都合のために）左随伴を持たないことを示せ．
2. 忘却函手の右随伴 $D' : \mathbf{Set} \to \mathbf{Top}$ は（余積における不都合のために）右随伴を持たないことを示せ．
3. （**Top** における通常の積に対する圏論的な構成）
   (a) 対角函手 $\Delta : C \to C^J$, $\Delta' : D \to D^J$，および $T \in C^J$ に対して，各 $G : C \to D$ は $\langle \tau : c \dot\to T\rangle \mapsto \langle G\tau : Gc \dot\to GT\rangle$ によって $G_* : (\Delta \downarrow T) \to (\Delta' \downarrow GT)$ を定義する．もし G_* が左随伴を持ち GT が D における極限を持つならば，T は C における極限を持つことを示せ．
   (b) G を忘却函手 $\mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ とし J を離散圏とするとき，G_* の左随伴を構成せよ．ここで，そのような左随伴は集合 S の上に，与えられた J を添字集合に持つ関数 $f_i : S \to GX_i$ の族を連続関数の族にするような位相で最弱のものを構成することを示すこと．
   (c) 結論として **Top** はすべての（通常の）積を持つことを示せ．
4. 包含函手 $\mathbf{Top}_{n+1} \to \mathbf{Top}_n$（ただし $n = 0, 1, 2, 3$）の各々に対する左随伴を構成せよ．ここで，$\mathbf{Top}_n$ は **Top** の中のすべての T_n-空間からなる充満部分圏を表し，T_4 = 正規，T_3 = 正則，T_2 = ハウスドルフ，等々である．

---

[2] ［訳注］演習問題 1 の D はこの節の最初に導入されたものである．

5. 包含函手 **Haus** → **Top** は右随伴を持たないことを示せ．ここで，**Top** におけるハウスドルフ空間のコイコライザが必ずしもハウスドルフにならないことを示せばよい．結論として忘却函手 **Haus** → **Set** は右随伴を持たないことを示せ．

注釈

随伴函手定理の例と特殊な場合は沢山ある．実際，多くの部分的な発見や再発見がもたらされてきた．その一つのバージョンとして普遍射の存在に対するブルバキによる条件 Bourbaki [1957] がある．このバージョンは，明らかに解集合条件を定式化しているが，ブルバキによる「構造」の概念は圏論的な考察を用いていないため，扱いにくかった．随伴函手定理の現在のバージョンは Freyd [1964] によって定式化され広められた．彼はまた *SAFT* も定式化した．我々のバージョンの特別な始対象定理は G. M. Kelly によるものである（個人的な議論による）．

第 VI 章　モナドと代数

この章では普遍代数と随伴函手の間の関係をさらに詳しく調べる．代数の各タイプ τ（第 V 章第 6 節）について，その与えられたタイプのすべての代数からなる圏 $\mathbf{Alg}_\tau$，忘却函手 $G:\mathbf{Alg}_\tau \to \mathbf{Set}$，およびその左随伴 F が得られる．F は各集合 S に対して，S の要素から生成される，タイプ τ の自由代数 FS を割り当てる．この随伴 $\langle F, G, \varphi\rangle : \mathbf{Set} \rightharpoonup \mathbf{Alg}_\tau$ のトレースは圏 $\mathbf{Set}$ で取られる．実際，合成 $T = GF$ は函手 $\mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ であり，これは各集合 S にそれに対応する自由代数のすべての要素からなる集合を割り当てる．さらにこの函手 T はモノイドに似た構造を与えるある自然変換を備えている．これは「モナド」と呼ばれる．このとき顕著なのは圏 $\mathbf{Alg}_\tau$ 全体がこの $\mathbf{Set}$ におけるモナドから再構築できるということである．もう一つの主要な結果は Beck による定理であり，これは，基底の圏 X におけるモナド T からそのように再構築できるような圏 A と随伴 $\langle F, G, \varphi\rangle : X \rightharpoonup A$ を正確に記述している．このとき，この最後の意味での代数はコンパクトハウスドルフ空間を含むほど一般的であることがわかる（第 9 節）．

1　圏におけるモナド

任意の自己函手 (endofunctor) $T: X \to X$ は合成 $T^2 = T \circ T : X \to X$ や $T^3 = T^2 \circ T : X \to X$ を持つ．$\mu : T^2 \stackrel{\cdot}{\to} T$ を各 $x \in X$ についてコンポーネント $\mu_x : T^2x \to Tx$ を持つ自然変換とすると，$T\mu : T^3 \stackrel{\cdot}{\to} T^2$ はコンポーネント $(T\mu)_x = T(\mu_x) : T^3x \to T^2x$ を持つ自然変換であり，$\mu T : T^3 \stackrel{\cdot}{\to} T^2$

はコンポーネント $(\mu T)_x = \mu_{Tx}$ を持つ自然変換である．$T\mu$ と μT は第 II 章第 5 節の意味での「水平」合成である．

定義 1 圏 X におけるモナド (monad) $T = \langle T, \eta, \mu \rangle$ は函手 $T : X \to X$ と二つの自然変換

$$\eta : I_X \dot{\to} T, \qquad \mu : T^2 \dot{\to} T \tag{1}$$

からなり，次の図式を可換にするものである．

$$\begin{array}{ccc} T^3 & \xrightarrow{T\mu} & T^2 \\ {\scriptstyle \mu T}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ T^2 & \xrightarrow{\mu} & T \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} IT & \xrightarrow{\eta T} & T^2 & \xleftarrow{T\eta} & TI \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle \mu} & & \| \\ T & = & T & = & T \end{array} \tag{2}$$

形式的にはモナドの定義は，序章で述べた集合におけるモノイド M の定義に似ている．モノイドの要素の集合 M は自己函手 $T : X \to X$ で置き換えられ，二つの集合のカルテシアン積 $\times$ は二つの函手の合成で置き換えられ，乗法の二項演算 $\mu : M \times M \to M$ は変換 $\mu : T^2 \dot{\to} T$ で置き換えられ，単位 (恒等) 元 $\eta : 1 \to M$ は $\eta : I_X \dot{\to} T$ で置き換えられている．したがって，η をモナド T の**単位元** (unit) と呼ぶ．と呼び μ を**乗法** (multiplication) と呼ぶ．このとき (2) の最初の可換図式はモナドの**結合律** (associative law) であり，二番目と三番目の図式はそれぞれ左および右**単位元律** (unit law) を表している．端的に言えば，X のモナドは X の自己函手からなる圏におけるモノイドに他ならず，自己函手の合成に置き換えられる積 $\times$ と恒等自己函手により定まる単位元を持つ．

用語法． この数学的対象 $\langle X, T, \eta, \mu \rangle$ は「双対標準構成 (dual standard construction)[1]」,「トリプル (triple)」,「モノイド (monoid)」,「トライアド (triad)」といった様々な名前で呼ばれてきた．しかし，不幸にも「トリプル」という語がこの意味でしばしば用いられたことが無用な混乱を拡大した．それは，順序付き三つ組 (ordered triple) との名前の衝突や，さらに世界の何かから三重に導出されたわけではない函手に対し「トリプル導来函手 (triple

[1] ［訳注］標準構成の双対のこと．標準構成とは後述のコモナドである．

derived functor)」といった誤った連想を引き起こす用語を使うことになってしまうことに伴うものである．よって**モナド**という用語を使うことにする．

すべての随伴 $\langle F, G, \eta, \varepsilon\rangle : X \rightharpoonup A$ は圏 X におけるモナドを生じさせる．特に二つの函手 $F : X \to A$ と $G : A \to X$ の合成 $T = GF$ は自己函手である．随伴の単位元 η は自然変換 $\eta : I \stackrel{\cdot}{\to} T$ であり，余単位元 $\varepsilon : FG \stackrel{\cdot}{\to} I_A$ は水平合成により自然変換 $\mu = G\varepsilon F : GFGF \stackrel{\cdot}{\to} GF = T$ を生じる．この μ についての前の (2) の結合律は下の一番目の図式の可換性になる．

$$\begin{array}{ccc} GFGFGF & \xrightarrow{GFG\varepsilon F} & GFGF \\ {\scriptstyle G\varepsilon FGF}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G\varepsilon F} \\ GFGF & \xrightarrow{G\varepsilon F} & GF \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} FGFG & \xrightarrow{FG\varepsilon} & FG \\ {\scriptstyle \varepsilon FG}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} \\ FG & \xrightarrow{\varepsilon} & I_A \end{array}$$

前の G と後の F を落とすとこれは二番目の図式の可換性になる．これは（水平）合成 $\varepsilon\varepsilon = \varepsilon \cdot (FG\varepsilon) = \varepsilon \cdot (\varepsilon FG)$ の定義そのもの（第 II 章第 5 節）により（すなわち函手と自然変換の「相互交換法則」により）成り立つ．同様に (2) の左および右単位元律は図式

$$\begin{array}{ccccc} I_X GF & \xrightarrow{\eta GF} & GFGF & \xleftarrow{GF\eta} & GFI_X \\ & {\scriptstyle =}\searrow & \downarrow{\scriptstyle G\varepsilon F} & \swarrow{\scriptstyle =} & \\ & & GF & & \end{array}$$

に還元され，これは本質的に二つの三角図式で表される随伴についての恒等式

$$1 = G\varepsilon \cdot \eta G : G \stackrel{\cdot}{\to} G\ , \qquad 1 = \varepsilon F \cdot F\eta : F \stackrel{\cdot}{\to} F$$

に他ならない．それゆえ $\langle GF, \eta, G\varepsilon F\rangle$ は実際 X におけるモナドである．これを**随伴** $\langle F, G, \eta, \varepsilon\rangle$ **により定義されるモナド**と呼ぶ．

たとえば**Set** における**自由群モナド** (free group monad) は，随伴 $\langle F, G, \varphi\rangle$: **Set** $\rightharpoonup$ **Grp** で G : **Grp** $\to$ **Set** が通常の忘却函手であるものにより定義されるモナドである．

双対的に，圏における**コモナド** (comonad) は函手 L と自然変換

$$L : A \to A\ , \qquad \varepsilon : L \stackrel{\cdot}{\to} I\ , \qquad \delta : L \stackrel{\cdot}{\to} L^2$$

からなり，図式

$$
\begin{array}{ccc}
L & \xrightarrow{\delta} & L^2 \\
{\scriptstyle \delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle L\delta} \\
L^2 & \xrightarrow[\delta L]{} & L^3
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccc}
L & = & L & = & L \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \| \\
IL & \xleftarrow{\varepsilon L} & L^2 & \xrightarrow{L\varepsilon} & LI
\end{array}
$$

を可換にするものである．各随伴 $\langle F, G, \eta, \varepsilon\rangle : X \rightharpoonup A$ は A のコモナド $\langle FG, \varepsilon, F\eta G\rangle$ を定義する．

前順序 P におけるモナドとは何か？ 函手 $T : P \to P$ は関数 $T : P \to P$ で単調な（P で $x \leqq y$ なら $Tx \leqq Ty$）ものに他ならない．(1) のような自然変換 η や μ が存在するのは，ちょうどすべての $x \in P$ について

$$x \leqq Tx\,, \qquad T(Tx) \leqq Tx \tag{3}$$

となるときである．このとき図式 (2) は必ず可換になる．なぜなら前順序では対象から対象へは高々一つの射しか存在しないからである．(3) の最初の式は $Tx \leqq T(Tx)$ を与える．いま前順序 P が半順序（$x \leqq y \leqq x$ ならば $x = y$）であると仮定する．このとき (3) の式から $T(Tx) = Tx$ が従う．ゆえに半順序 P におけるモナド T はちょうど P における**閉包演算** (closure operation) t となる．すなわち任意の $x \in P$ について $x \leqq tx$ と $t(tx) = tx$ が成り立つ単調関数 $t : P \to P$ である．

モナドのモルフィズム $\langle T, \mu, \eta\rangle \to \langle T', \mu', \eta'\rangle$（適切な自然変換 $T \dot{\to} T'$）と与えられた圏 X におけるすべてのモナドからなる圏の記述は読者に任せることにする．

2　モナドに関する代数

「すべてのモナドは適切な随伴函手の対により定義できるか？」という自然な問の答は肯定的であり，実際，二つの適切な随伴函手の対による二つの肯定的な答が存在する．(Eilenberg-Moore [1965] による）第一の答は X のモナド $\langle T, \eta, \mu\rangle$ から「T-代数」からなる圏 X^T と随伴 $X \rightharpoonup X^T$ を構築する．この随伴は X で $\langle T, \eta, \mu\rangle$ を定義する．形式的には，この T-代数の定義

は「モノイド」T が作用する集合の定義である（序章を参照されたい）．

定義 1 $T = \langle T, \eta, \mu \rangle$ が X におけるモナドであるとき，T-代数 $\langle x, h \rangle$ は対象 $x \in X$（代数の基底対象）と X の射 $h : Tx \to x$（代数の構造射と呼ばれる）からなり，図式

$$\begin{CD} T^2x @>{Th}>> Tx \\ @V{\mu_x}VV @VV{h}V \\ Tx @>{h}>> x \end{CD} \qquad \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\eta_x} & Tx \\ & {\scriptstyle 1}\searrow & \downarrow{\scriptstyle h} \\ & & x \end{array} \tag{1}$$

を両方とも可換にする（最初の図式は結合律であり，二番目は単位元律）．T-代数の射 $f : \langle x, h \rangle \to \langle x', h' \rangle$ は図式

$$\begin{CD} x @<{h}<< Tx \\ @V{f}VV @VV{Tf}V \\ x' @<{h'}<< Tx' \end{CD} \tag{2}$$

を可換にする X の射 $f : x \to x'$ である．

定理 1 （すべてのモナドは T-代数により定義される）．$\langle T, \eta, \mu \rangle$ が X におけるモナドであるとき，すべての T-代数とそのモルフィズムの集合は圏 X^T をなす．ある随伴

$$\langle F^T, G^T; \eta^T, \varepsilon^T \rangle : X \rightharpoonup X^T$$

が存在し，そこでは函手 G^T と F^T はそれぞれ割り当て

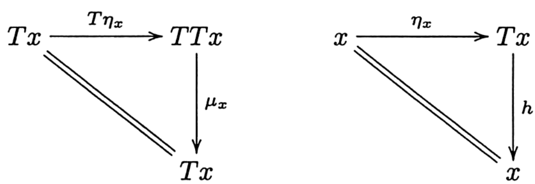
$$G^T : \begin{array}{ccc} \langle x, h \rangle & \longmapsto & x \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \langle x', h' \rangle & \longmapsto & x' \end{array} \qquad F^T : \begin{array}{ccc} x & \longmapsto & \langle Tx, \mu_x \rangle \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle Tf} \\ x' & \longmapsto & \langle Tx', \mu_{x'} \rangle \end{array} \tag{3}$$

により与えられ，各 T-代数 $\langle x, h \rangle$ について $\eta^T = \eta$ かつ $\varepsilon^T \langle x, h \rangle = h$ が成り立つ．この随伴により X において定義されるモナドは最初に与えられたモナド $\langle T, \eta, \mu \rangle$ である．

証明は直接的な検証による．$f : \langle x, h\rangle \to \langle x', h'\rangle$ と $g : \langle x', h'\rangle \to \langle x'', h''\rangle$ が T-代数の射であるとき，その合成 gf もそうである．この射の合成によって，主張通りに T-代数は明らかに圏 X^T をなす．函手 $G^T : X^T \to X$ は単に各 T-代数の構造射を忘れる自明な函手である．他方，各 $x \in X$ について対 $\langle Tx, \mu_x : T(Tx) \to Tx\rangle$ は，モナド T に関する結合律と（左）単位元律を考えれば T-代数（x 上の**自由 T-代数** (free T-algebra)）である．ゆえに $x \mapsto \langle Tx, \mu_x\rangle$ は，主張通り，実際に函手 $F^T : X \to X^T$ を定義する．このとき $G^T F^T x = G^T\langle Tx, \mu_x\rangle = Tx$ であり，よって最初に与えられたモナドの単位元 η は自然変換 $\eta = \eta^T : I_X \dot{\to} G^T F^T$ である．他方，$F^T G^T\langle x, h\rangle = \langle Tx, \mu_x\rangle$ であり，また T-代数の定義 (1) における最初の正方図式は構造射 $h : Tx \to x$ が T-代数の射 $\langle Tx, \mu_x\rangle \to \langle x, h\rangle$ であることを述べている．その結果として得られる変換

$$\varepsilon^T_{\langle x,h\rangle} = h : F^T G^T\langle x, h\rangle \to \langle x, h\rangle$$

は（上の）T-代数の射の定義より自然である．随伴のための三角恒等式は



となる．最初のものは T についての（右）単位元律により成り立ち，二番目のものは T-代数の単位元律（(1) を見られたい）により成り立つ．それゆえ述べた通りに η^T と ε^T は随伴を定義する．

したがってこの随伴は X におけるモナドを決定する．自己函手 $G^T F^T$ は元々の T であり，その単位元 η^T は元々の単位元であり，その乗法 $\mu^T = G^T\varepsilon^T F^T$ は $\mu^T x = G^T\varepsilon^T\langle Tx, \mu_x\rangle = G^T\mu_x = \mu_x$ であり，よって元々の T の乗法である．これで証明は完了である．

ここで，身近なモナドについての T-代数が身近な代数になることを示すいくつかの例を与えよう．

閉包． 前順序 P 上の閉包演算 T は P におけるモナドである（第 1 節を見られたい）．このとき T-代数は $Tx \leqq x$（構造射）となる $x \in P$ である．す

べての $x \in P$ について $x \leqq Tx$ なので，T-代数は単に $x \leqq Tx \leqq x$ を満たす要素 $x \in P$ である．P が半順序であるとき，これは $x = Tx$ を意味するので，T-代数は単に通常の意味で閉な半順序の要素 x である．

群の作用． G が（小さな）群であるとき，すべての（小さな）集合 X について，$x \in X$, $g_1, g_2 \in G$ および G の単位元 u に関する定義

$$TX = G \times X, \qquad X \xrightarrow{\eta_x} G \times X, \qquad G \times (G \times X) \xrightarrow{\mu_x} G \times X,$$
$$x \mapsto \langle u, x \rangle, \qquad \langle g_1, \langle g_2, x \rangle \rangle \mapsto \langle g_1 g_2, x \rangle$$

は **Set** 上のモナド $\langle T, \eta, \mu \rangle$ を定義する．このとき T-代数は集合 X と関数 $h : G \times X \to X$（構造射）で常に

$$h(g_1 g_2, x) = h(g_1, h(g_2, x)) \ , \qquad h(u, x) = x$$

が成り立つものである．$h(g, x)$ を $g \cdot x$ と書くと，これらは $\langle g, x \rangle \mapsto g \cdot x$ が群 G の集合 X への作用を定義することの通常の条件に過ぎない．このモナド T についての T-代数が群の作用に過ぎないことは驚きではない．なぜなら我々の T-代数の定義は群の作用をモデルにして構築されたからである．

加群． R が（小さな）環であるとき，各（小さな）アーベル群 A について，$a \in A$, $r_1, r_2 \in R$ に関する定義

$$TA = R \otimes A \ , \qquad A \to R \otimes A \ , \qquad R \otimes (R \otimes A) \to R \otimes A \ ,$$
$$a \mapsto 1 \otimes a \ , \qquad r_1 \otimes (r_2 \otimes a) \mapsto r_1 r_2 \otimes a$$

は **Ab** 上のモナドを定義する．上の場合とほぼ同様に T-代数はちょうど左 R-加群となる．

演習問題

1. 完備半束 (complete semi-lattice)（E. Manes の学位論文）．完備半束とは半順序 Q ですべての部分集合 $S \subset Q$ が Q で最小上界（supremum, least upper bound）を持つものであることを思い出そう．$\mathcal{P}$ を，$\mathcal{P}X$ がすべての部分集合 $S \subset X$ からなる集合であり各関数 $f : X \to Y$ について $(\mathcal{P}f)S$ が S の f による順像であるような **Set** 上の**共変冪集合函手** (covariant power set functor) とする．各集合 X について，$\eta_X : X \to \mathcal{P}X$ は各 $x \in X$ を一点集合 $\{x\}$ に写し，$\mu_X : \mathcal{P}\mathcal{P}X \to \mathcal{P}$ は各集合の集合をその合併集合に写すものとする．

(a) $\langle \mathcal{P}, \eta, \mu \rangle$ は **Set** 上のモナド $\mathcal{P}$ であることを証明せよ．

(b) 各 $\mathcal{P}$-代数 $\langle X, h \rangle$ は，$x \leqq y$ が $h\{x, y\} = y$ により定義されるとき完備半束であり各集合 S について $\sup S = hS$ となることを証明せよ．

(c) 逆に，すべての（小さな）完備半束はこの方法で $\mathcal{P}$-代数になることを証明せよ．

(d) $\mathcal{P}$-代数からなる圏は，すべての（小さな）完備半束からなり順序と最小上界を保存する関数を射とする圏であることを結論付けよ．

2. $G^T : X^T \to X$ は極限を創出することを示せ．

3. (a) モナド $\langle T, \eta, \mu \rangle$ と $\langle T', \eta', \mu' \rangle$ について，モナドの射 θ を適切な自然変換 $\theta : T \dot{\to} T'$ として定義し，X におけるすべてのモナドからなる圏を構築せよ．

(b) θ から，$G^T \circ \theta^* = G^{T'}$ を満たす函手 $\theta^* : X^{T'} \to X^T$ と自然変換 $F^T \dot{\to} \theta^* \circ F^{T'}$ を構築せよ．

3　代数との比較

随伴 $X \rightharpoonup A$ から始めて，随伴により X で定義されるモナド T を構築し，それから T-代数の圏 X^T を構築すると仮定しよう．このとき次のように尋ねてみる．すなわち，これは元々の圏 A とどのように関係しているのだろうか？ その完全な答は圏だけではなく随伴にも関係し，それは次の比較定理によりもたらされる．

定理 1　（随伴と代数の比較定理）．

$$\langle F, G, \eta, \varepsilon \rangle : X \rightharpoonup A$$

を随伴とし，$T = \langle GF, \eta, G\varepsilon F \rangle$ をその随伴が定義する X におけるモナドとする．このとき $G^T K = G$ と $KF = F^T$ を満たす一意的な函手 $K : A \to X^T$ が存在する．

証明　定理の結論は，次の図式に射 K をはめ込んで F-正方図式と G-正方図式の両方を可換にすることができると主張している．

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{K}{\cdots\cdots\to} & X^T \\ F\big\uparrow\big\downarrow G & & F^T\big\uparrow\big\downarrow G^T \\ X & = & X \end{array} \tag{1}$$

いま，与えられた随伴の余単位元 ε は各 $a \in A$ について射 $G\varepsilon_a : GFGa \to Ga$ を定義する．この射は対象 $Ga = x$ 上の T-代数構造についての構造射 h と考えることができる．なぜなら必要な図式（第 2 節 (1) の場合）は

$$\begin{CD} GFGFGa @>{GFG\varepsilon_a}>> GFGa \\ @V{\mu_{Ga}=G\varepsilon FGa}VV @VV{G\varepsilon_a}V \\ GFGa @>>{G\varepsilon_a}> Ga \end{CD} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} Ga & \xrightarrow{\eta_{Ga}} & GFGa \\ & \searrow^{1} & \big\downarrow{\scriptstyle G\varepsilon_a} \\ & & Ga \end{array}$$

だからである．これらは可換である（最初のものは $G\varepsilon\varepsilon$ の定義であり，二番目のものは与えられた随伴についての三角図式である）．それゆえ A における任意の $f : a \to a'$ について

$$Ka = \langle Ga, G\varepsilon_a \rangle\,, \qquad Kf = Gf : \langle Ga, G\varepsilon_a \rangle \to \langle Ga', G\varepsilon_{a'} \rangle \tag{2}$$

により K を定義する．ε は自然であるので，提案された射 Kf は $G\varepsilon$ と可換であり，T-代数のモルフィズムである．K が

$$KF = F^T, \qquad G^T K = G \tag{3}$$

を満たす函手であることの検証は簡単にできる．

残っているのは K の一意性を示すことである．まず，各 Ka は T-代数でなければならず，可換性の要件 $G^T K = G$ はこの T-代数 Ka の基底 X-対象が Ga であることを意味している．それゆえ Ka はある構造射 h について $Ka = \langle Ga, h \rangle$ の形でなければならない．さらに，$G^T K = G$ は A の射 f に関する K の値が $Kf = Gf$ でなければならないことを意味しており，これはちょうど上の (2) の通りである．残っているのは構造射 h を決定することだけである．いま (1) は可換であり，二つの随伴 $\langle F, G, \ldots \rangle$ と $\langle F^T, G^T, \ldots \rangle$ は同じ単位元 η を持っており，そのため二つの函手 $K : A \to X^T$ と恒等函手 $I : X \to X$ は，第 IV 章第 7 節で考えた意味で最初の随伴から二番目

の随伴への射を定義する．このとき，この射について第 IV 章第 7 節命題 1 は $K\varepsilon = \varepsilon^T K$ であると述べている．しかし射に関して K は G であるので各 $a \in A$ について $K\varepsilon_a = G\varepsilon_a$ であり，一方で代数の余単位元 ε^T の定義は $\varepsilon^T Ka = \varepsilon^T \langle Ga, h\rangle = h$ を与える．こうして $K\varepsilon = \varepsilon^T K$ から $G\varepsilon_a = h$ が従い，よって構造射 h が決定されて K は一意的である． □

多くの身近な随伴 $\langle F, G, \ldots\rangle$ についてこの比較函手 K は同型になる．このとき G は**モナディック** (monadic)（**トリプラブル** (tripleable)）であると言う．別の著者（Barr-Wells [1985]）にとっては,「トリプラブル」は K が圏の同値であることだけを意味する．しかしながら，K が同型でないときや同値ですらないときにも簡単な例がある．忘却函手 $G : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ は各集合 X を離散位相空間（すべての部分集合が X で開）に写す左随伴 D を持つ．なぜなら恒等射 $\eta_X : X \to GDX$ は対象 X から函手 G への自明な普遍射だからである．この随伴 $\langle D, G, \eta, \ldots\rangle : \mathbf{Set} \rightharpoonup \mathbf{Top}$ は $\mathbf{Set}$ 上に恒等射であるモナド $I = \langle I, 1, 1\rangle$（恒等函手，単位元としての恒等変換，乗法としての恒等変換）を定義する．$\mathbf{Set}$ における I-代数は単に集合であり，比較函手 $\mathbf{Top} \to \mathbf{Set}^I = \mathbf{Set}$ は，この場合，与えられた忘却函手 G である．

4　語と自由半群

半群の場合，比較函手は明示的に描くことができる．半群 (semigroup) とは二項演算 $\nu : S \times S \to S$ を持つ集合 S である．集合 X 上の自由半群 WX は X 上の自由モノイド（第 II 章第 7 節）と同様である．これは文字 $x_i \in X$ で綴られ長さ n が正であるすべての語 (word) $\langle x_1\rangle \ldots \langle x_n\rangle$ からなる．ここで $\langle x\rangle$ と書くのは WX における語 $\langle x\rangle$ と要素 $x \in X$ を区別するためである．語の乗法は並置

$$(\langle x_1\rangle \ldots \langle x_n\rangle)(\langle y_1\rangle \ldots \langle y_m\rangle) = \langle x_1\rangle \ldots \langle x_n\rangle\langle y_1\rangle \ldots \langle y_m\rangle$$

による．この乗法 ν は結合的であり，これにより集合 WX すなわち直和 $\amalg X^n$, $n = 1, 2, \ldots$ が半群 $FX = \langle WX, \nu\rangle$ になる．$G : \mathbf{Smgrp} \to \mathbf{Set}$ を小さな半群からなる圏からの忘却函手（乗法を忘れる）とすると $x \mapsto \langle x\rangle$ によって定義される射 $\eta_X : X \to GFX$（各 x を 1 文字 x からなる語に写す）は X

から G への普遍射をなす．それゆえ F は函手であり，G の左随伴であり，η は随伴

$$\langle F, G, \eta, \varepsilon \rangle : \mathbf{Set} \rightharpoonup \mathbf{Smgrp}$$

を定義する．S を任意の半群（乗法として書かれる結合的二項演算子 $S \times S \to S$ を持つ集合 S）とすると，この随伴の余単位元 ε_S は定義により，合成 $G\varepsilon_S \circ \eta_{GS} : GS \to GFGS \to GS$ が恒等射になるような半群モルフィズム $\varepsilon_S : FGS \to S$ となる．言い換えれば ε_S は各生成元 $\langle s \rangle$ を s に写す一意的な半群モルフィズムである．これはすべての $s_i \in S$ について

$$\varepsilon_S(\langle s_1 \rangle \ldots \langle s_n \rangle) = s_1 \ldots s_n \quad (S\text{ の積}) \tag{1}$$

であることを意味する．すなわち余単位元 ε は「かぎ括弧」$\langle\ \rangle$ を除去する．

命題 1 随伴 $\mathbf{Set} \rightharpoonup \mathbf{Smgrp}$ により決定される $\mathbf{Set}$ 上のモナドは

$$W = \langle W : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set},\ \eta : I \dot{\to} W,\ \mu : W^2 \dot{\to} W \rangle$$

である．ただし $WX = \coprod_{n=1}^{\infty} X^n$ であり，各 $x \in X$ について $\eta_X x = \langle x \rangle$ であり，すべての正整数 k，k 個の正整数からなるすべての組 $n_1 \ldots n_k$，およびすべての $x_{ij} \in X$ について μ_X は

$$\begin{aligned}\mu_X(\langle\langle x_{11} \rangle \ldots \langle x_{1n_1} \rangle\rangle \ldots \langle\langle x_{k1} \rangle \ldots \langle x_{kn_k} \rangle\rangle)&\\ = \langle x_{11} \rangle \ldots \langle x_{1n_1} \rangle \ldots \langle x_{k1} \rangle \ldots \langle x_{kn_1} \rangle&\end{aligned}$$

である．

証明 定義より $\eta x = \langle x \rangle$ であり，$\mu = G\varepsilon F : W^2 \dot{\to} W$ は ε_S について上の式により決定される．ここでは W^2X の各要素を，長さがそれぞれ $n_1, \ldots, n_k$ の k 個の語からなる（長さ k の）語として書いた．より簡単に言えば，μ_X は語の語に適用されて外側のかぎ括弧を取り除くのである．

この記述により半群の概念に表立って言及せずにモナド W の単位元律と結合律を直接検証できるということに注意されたい．たとえば μ の結合律は三重のかぎ括弧についての所見であり，それは最初に真ん中の括弧を取り除き次に外側の括弧を取り除くことが，最初に外側の括弧を取り除き次に（新

たな）外側の括弧を取り除くのと同じ結果を与えるというものである．　□

命題 2 上の **Set** における語モナド W について W-代数は $\langle S, \nu_1, \nu_2, \ldots \rangle$ である．すなわち，各正整数 n について一つの n 項演算 $\nu_n : S^n \to S$ を備えた集合 S であり，$\nu_1 = 1$ および，すべての正整数 k と k 個の正整数 $n_1, \ldots,$ n_k からなるすべての組について，恒等式

$$\nu_k(\nu_{n_1} \times \cdots \times \nu_{n_k}) = \nu_{n_1+\cdots+n_k} : S^{n_1+\cdots+n_k} \to S \tag{2}$$

が成り立つようなものである．W-代数のモルフィズム $f : \langle S, \nu_1, \ldots \rangle \to \langle S', \nu'_1, \ldots \rangle$ は関数 $f : S \to S'$ で各 ν_n と可換なものであり，$f\nu_n = \nu'_n f^n :$ $S^n \to S$ となる．

証明　W-代数 $\langle S, h : WS \to S \rangle$ を考えよう．$WS = \amalg S^n$ であるので，構造射 h は各 n ごとに一つの n 項演算 $\nu_n : S^n \to S$ からなる並びである．代数の単位元律は $h\eta_X = 1$ であること，すなわち ν_1 が恒等関数であることを要求する．他方，集合の積は集合の余積について分配律を満たすので，

$$W(WX) = \coprod_k (\coprod_n X^n)^k \cong \coprod_k \coprod_n (X^{n_1} \times \cdots \times X^{n_k}) \cong \coprod_k \coprod_n X^{n_1+\cdots+n_k}$$

となる．ここで真ん中と右側の n は k 個の組 $\langle n_1, \ldots, n_k \rangle$ の各要素を取る．この記法により構造射 h についての結合律は上述の形式 (2) を取る．　□

この恒等式 (2) の最も単純な場合は，$3 = 2 + 1 = 1 + 2$ および ν_1 が恒等関数なので，

$$\nu_2(\nu_2 \times 1) = \nu_3 = \nu_2(1 \times \nu_2) : S \times S \times S \to S$$

となる．二項演算 ν_2 を乗法として書けば，これは三項演算 ν_3 がすべての要素 $x, y, z \in S$ について

$$(xy)z = \nu_3(x, y, z) = x(yz)$$

を満たすということを述べている．同様に ν_n は n 重の積でなければならない．簡単な帰納法により次のことが証明される．

系 3 代数系 $\langle S, \nu_1, \nu_2, \ldots\rangle$ が上のような W-代数であるということと，$\nu_1 = 1$ であり，$\nu_2 : S \times S \to S$ が S 上の結合的な二項演算であり，さらにすべての $n \geqq 2$ について $\nu_{n+1} = \nu_n(\nu_2 \times 1) : S^{n+1} \to S$ であるということは同値である．

したがって，一つの結合的な演算を持つ集合 $\langle S, \nu\rangle$ と見なして半群から始め，そこから **Set** 上のモナド W を定義し，そして W-代数の圏を構築しても，代数系 $\langle S, \nu_1, \nu_2, \ldots\rangle$ と見なしたのと同じ半群が得られる．ここで $\nu_1 = 1$ であり，$\nu_2 = \nu$ であり，ν_{n+1} は ν_2 が繰り返されたものである．比較函手 $K : \mathbf{Smgrp} \to \mathbf{Set}^W$ は $\langle S, \nu\rangle \mapsto \langle S, 1, \nu_2, \ldots, \nu_n, \ldots\rangle$ であり，ここで ν_n は二項の ν の繰り返しである．言い換えると K は同型であるが，これは一つの結合的な二項演算を持つ代数系 $\langle S, \nu\rangle$ を，この二項演算から導かれるすべての繰り返しの演算を持つ同じ集合に置き換える．

同様の記述は他のよく知られているモナドの代数にも適用される（演習問題 1, 2）．

演習問題

1. W_0 を忘却函手 $\mathbf{Mon} \to \mathbf{Set}$ により定義される **Set** におけるモナドとする．W_0-代数が n 項演算 ν_n の列 ν_0, ν_1, ... を伴う集合 M であることを示せ．ここで $\nu_0 : * \to M$ はモノイド M の単位元であり，ν_n は n 項の積である．
2. 任意の環 R について，左 R-加群の圏からの忘却函手 $G : R\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Set}$ は左随伴を持ち，**Set** におけるモナド $\langle T_R, \eta, \mu\rangle$ を定義する．
   - (a) このモナドが以下のように記述できることを証明せよ．各集合 X について $T_R X$ はゼロでない値を有限個のみ持つすべての関数 $f : X \to R$ からなる集合である．各関数 $t : X \to Y$ と各 $y \in Y$ について $[(T_R t)f]_y = \Sigma' f_x$ すなわち $tx = y$ となるすべての $x \in X$ についての和である．各 $x \in X$ について $\eta_x x : X \to R$ は $(\eta_x x)x = 1$, $(\eta_x x)x' = 0$ により定義される．各 $k \in T_R(T_R X)$ について $\mu_x k : X \to R$ は各 $x \in X$ について $(\mu_x k)_x = \Sigma_f k_f f_x$，すなわちすべての $f \in T_R X$ についての和により定義される．
   - (b) この記述から $\langle T_R, \eta, \mu\rangle$ がモナドであることを直接検証せよ．
   - (c) $\langle T_R, \eta, \mu\rangle$-代数は通常の R-加群であり，加法とスカラー積ではなく線型結合されたすべての演算を経由して記述されることを示せ（構造射 h は各 f に

「各 $x \in X$ についての係数 f_x の線型結合」を割り当てる）．

3. 忘却函手 $\mathbf{CRng} \to \mathbf{Set}$ により定義される随伴の同様な完全な記述を与えよ．TX は文字（すなわち変数）が $x \in X$ であるすべての整係数多項式からなる環であることに注意されたい．
4. G が「環の乗法を忘れる」函手である随伴 $\langle F, G, \varphi \rangle : \mathbf{Ab} \rightharpoonup \mathbf{Rng}$ は $\mathbf{Ab}$ におけるモナド T を定義する．
   (a) このモナドの直接的な定義，すなわち本文で W について与えたような定義を与えよ．X^n は n 項のテンソル冪で置き換えられ，余積 $\amalg$ はアーベル群の（無限）直積で置き換えられる．
   (b) 対応する T-代数の記述を与えて，環から T-代数への比較函手が同型であることを示せ．

5　モナドに関する自由代数

ある随伴

$$\langle F, G, \varphi \rangle : X \rightharpoonup A$$

が与えられたとき，すべての $x \in X$ に対する対象 Fx を含む充満部分圏 $B \subset A$ はもう一つの随伴

$$\langle F_B, G_B, \varphi_B \rangle : X \rightharpoonup B$$

を導く．ここで，函手 F_B はコドメインを A から B に制限した F に他ならず，函手 G_B はドメインを B に制限した G に他ならない．一方で，この与えられた随伴は $x \in X$ と $b \in B$ について全単射 φ_B

$$\hom_B(F_B x, b) = \hom_A(Fx, b) \cong \hom_X(x, Gb) = \hom_X(x, G_B b)$$

を導く．これは明らかに x と b において自然である．さらにこの二番目の随伴 φ_B は X において一番目で定義されたのと同じモナドを定義する．この所見は，通常多くの異なる随伴によって X における全く同一のモナドが定義され得るということを示している．「最小の」このような随伴は B が FX，すなわちすべての「自由」対象 $Fx \in A$ を対象に持つ A の充満部分圏である場合のものだろう．このような自由対象間の射 $Fx \to Fy$ のよく知られている性質が，この部分圏 FX と随伴 φ_B をモナドから直接構築する方法を強く示唆している．その示唆されている構築をここに示す．これは実際にこの圏を

部分圏としてではなく直接与える（演習問題 3 を参照）.

定理 1 （モナドの Kleisli 圏 [1965]）. 圏 X におけるモナド $\langle T, \eta, \mu \rangle$ が与えられたとき，各対象 $x \in X$ について新しい対象 x_T を，X の各射 $f : x \to Ty$ について新しい射 $f^\flat : x_T \to y_T$ を考える．これらの新しい対象と射は，$f^\flat$ と $g^\flat : y_T \to z_T$ との合成が

$$g^\flat \circ f^\flat = (\mu_z \circ Tg \circ f)^\flat \tag{1}$$

により定義されているとき圏をなす．さらに，函手 $F_T : X \to X_T$ と $G_T : X_T \to X$ がそれぞれ

$$F_T : k : x \to y \mapsto (\eta_y \circ k)^\flat : x_T \to y_T \ , \tag{2}$$

$$G_T : f^\flat : x_T \to y_T \mapsto \mu_y \circ Tf : Tx \to T^2 y \to Ty \tag{3}$$

により定義され，対象について $G_T x_T = Tx$ となる．このとき全単射 $f^\flat \mapsto f$ は随伴 $\langle F_T, G_T, \varphi_T \rangle : X \rightharpoonup X_T$ を与え，これは X においてちょうど与えられたモナド $\langle T, \eta, \mu \rangle$ を定義する．

証明のスケッチ． 射 $f^\flat$ の定義は hom 集合上の全単射 $X_T(x_T, y_T) \cong X(x, Ty)$ をもたらし，X_T における合成の定義は X における合成

$$x \xrightarrow{f} Ty \xrightarrow{Tg} T^2 z \xrightarrow{\mu_z} Tz$$

を参照する．適当に大きな図式により，新しい合成が結合的であることが示される．他の図式により，$(\eta_x)^\flat : x_T \to x_T$ がこの合成の右および左恒等射であることが証明される．別の計算により，上で記述したような F_T と G_T は実際に函手であることが示される．構築してみると，$f^\flat \mapsto f$ は全単射

$$X_T(F_T x, y_T) = X_T(x_T, y_T) \cong X(x, Ty) = X(x, G_T y_T)$$

となる．これは x と y_T において自然であり，求める随伴 φ_T を生み出す．その単位元は η であり，余単位元 ε_T は $(\varepsilon_T) y_T = (1_{Ty})^\flat : (Ty)_T \to y_T$ により与えられる．結果として得られる X における乗法は $G_T \varepsilon_T F_T$ であり，これは G_T の定義により，ちょうど与えられた乗法 μ になる．それゆえこの随伴は元々のモナド T を定義するのである．

定理 2 （Kleisli 構築についての比較定理）．$\langle F, G, \eta, \varepsilon \rangle : X \rightharpoonup A$ を随伴とし $T = \langle GF, \eta, G\varepsilon F \rangle$ をそれが定義する X におけるモナドとする．このとき $GL = G_T$ と $LF_T = F$ を満たす一意的な函手 $L : X_T \to A$ が存在する．

証明は読者に残しておこう．L の一意性には，随伴のマップに関する第 IV 章第 7 節命題 1 の別の（そしていくらか異なる）応用が必要となることに注意されたい．

二つの比較定理は以下のようにまとめられる．

定理 3 X におけるモナド $\langle T, \eta, \mu \rangle$ が与えられたとき，X において $\langle T, \eta, \mu \rangle$ を定義するすべての随伴 $\langle F, G, \eta, \varepsilon \rangle : X \rightharpoonup A$ を対象とし，X については恒等函手である随伴のマップ（第 IV 章第 7 節）を射とする圏を考える．この圏は始対象 —— Kleisli 構築 —— と終対象 $\langle F^T, G^T, \eta, \varepsilon^T \rangle : X \rightharpoonup X^T$ を持ち

$$X_T \overset{L}{\dashrightarrow} A \overset{K}{\dashrightarrow} X^T$$

が比較函手となる．

演習問題

1. Kleisli 比較函手 L を構築し，その一意性を証明し，L による X_T の像はすべての Fx, $x \in X$ を対象とする A の充満部分圏 F_X であることを示せ．
2. L を制限することにより，圏の同値 $X_T \to FX$ が与えられることを示せ．
3. F が対象について全単射でない随伴の例を構築せよ．演習問題 2 における同値 $X_T \to FX$ が同型とは限らないことを導け．(示唆：$S \mapsto T(S) =$ 一点集合 は **Set** におけるモナドを定義する．)
4. まとめの比較定理 3 において，すべての随伴からなる圏は本当に存在するか？
5. $\langle F, G, \eta, \varepsilon \rangle : X \rightharpoonup B$ が X におけるモナド $\langle T, \eta, \mu \rangle$ を定義し，第二のモナド $\langle L, R, \eta', \varepsilon' \rangle : B \rightharpoonup A$ が B における恒等モナド（すなわち，$RL = I_B$, $\eta' = 1$ かつ $R\varepsilon' L = 1$）を定義するとき，合成随伴 $X \rightharpoonup A$ が X において同じモナド $\langle T, \eta, \mu \rangle$ を定義することを証明せよ．

6 分裂コイコライザ

ここである特別なタイプのコイコライザが必要になる．圏 C におけるフォーク (fork) とは C における図式

$$a \underset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\rightrightarrows}} b \xrightarrow{e} c \tag{1}$$

で $e\partial_0 = e\partial_1$ となるものを意味する．したがってフォークは図式 $a \rightrightarrows b$ から頂点 c への錐に他ならない．もしフォークであって，$f\partial_0 = f\partial_1$ を満たす任意の $f : b \to d$ が一意的な $f' : c \to d$ について $f = f'e$ という形を持つならば，射 e は射 ∂_0 と ∂_1 からなる平行対のコイコライザであることを思い出そう．(任意の圏 X への）任意の函手 $T : C \to X$ についてその結果として得られるフォーク

$$Ta \underset{T\partial_1}{\overset{T\partial_0}{\rightrightarrows}} Tb \xrightarrow{Te} Tc$$

がやはり（$T\partial_0$ と $T\partial_1$ の）コイコライザ Te を持つとき，射 e は ∂_0 と ∂_1 の**絶対コイコライザ** (absolute coequalizer) と呼ばれる．特に絶対コイコライザは自動的にコイコライザになる．同じ仕方で他の任意のタイプの絶対余極限（もしくは絶対極限）を定義することができる (Paré [1971a]).

C における**分裂フォーク** (split fork) とは，(1) にさらに二つの射

$$a \xleftarrow{t} b \xleftarrow{s} c \tag{2}$$

を伴い，(1) の射と共に条件

$$e\partial_0 = e\partial_1, \quad es = 1, \quad \partial_0 t = 1, \quad \partial_1 t = se \tag{3}$$

を満たすものである．s と t はフォーク (1) を**分裂**させると言われる．これらの条件から e が右逆射 s を伴う分裂エピ射であることが従う．分裂フォークは横向きの射の合成が両方とも恒等射であるような可換四角図式の対

$$\begin{array}{ccccc}
b & \xrightarrow{t} & a & \xrightarrow{\partial_0} & b \\
{\scriptstyle e}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \partial_1} & & \downarrow{\scriptstyle e} \\
c & \xrightarrow[s]{} & b & \xrightarrow[e]{} & c
\end{array}$$

として表現することもできる．別の言い方で述べてみよう．射 ∂_1 と e は函手圏 $C^{\mathbf{2}}$ における対象であり $\langle \partial_0, e\rangle : \partial_1 \to e$ はそれらの間の射であって $\langle t, s\rangle : e \to \partial_1$ を右逆射として持つ，すなわち $\langle \partial_0, e\rangle\langle t, s\rangle = \langle 1, 1\rangle$ である．

補題 1 すべての分裂フォークにおいて e は ∂_0 と ∂_1 のコイコライザである．

証明 $f\partial_0 = f\partial_1$ を満たす任意の射 $f : b \to d$ について $f' = fs : c \to d$ とおく．このとき分裂フォークを定義する等式 (3) を用いると

$$f'e = fse = f\partial_1 t = f\partial_0 t = f$$

となり，f は e を通じて分解される．他方，ある $k : c \to d$ について $f = ke$ ならば $fs = kes = k$ となるので，k は必ず $f' = fs$ であり f' は一意的である． □

∂_0 と ∂_1 の**分裂コイコライザ** (split coequalizer) と言えば，∂_0 と ∂_1 についてのこのような分裂フォークの射 e を意味することにしよう．任意の（ゆえにすべての）コイコライザが分裂するような平行対 ∂_0, ∂_1 を特徴付けることが可能である（演習問題 2）．

分裂フォークは合成と恒等射のみを含む等式で定義されるので，任意の函手を適用しても分裂フォークは保存される．ゆえに次が成り立つ．

系 2 すべての分裂フォークにおいて e は ∂_0 と ∂_1 の絶対コイコライザである．

Cat におけるフォークの例を挙げると，任意の圏 C について

$$C^2 \underset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\rightrightarrows}} C \xrightarrow{\ e\ } \mathbf{1}$$

がそうである．$C^{\mathbf{2}}$ は対象が C の射である圏である．∂_0 と ∂_1 は各射にそれぞれドメインとコドメインを割り当てる函手であり，e は C の各対象を $\mathbf{1}$ の一意的な対象に写す函手である．C が終対象 a_0 を持つならば，このフォークは $\mathbf{1}$ の一意的な対象を a_0 に写す函手 s と各 $c \in C$ を一意的な射 $c \to a_0$ に写す函手 t による分裂フォークである．

Grp におけるフォークの例を挙げておこう．$N \lhd G$ を G の任意の正規部

分群とし，半直積 $G \times_0 N$ を作る．これは $x \in G$, $n \in N$ について元 $\langle x, n\rangle$，および（明らかに結合的な）乗法 $\langle x, n\rangle\langle y, m\rangle = \langle xy, (y^{-1}ny)m\rangle$ を持つ．このとき

$$G \times_0 N \underset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\rightrightarrows}} G \xrightarrow{\ p\ } G/N$$

はフォークである．ただし p は商群 G/N への通常の射影であり，$\partial_0\langle x, n\rangle = x$, $\partial_1\langle x, n\rangle = xn$ である．さらにこのフォークにおいて p は明らかに ∂_0 と ∂_1 のコイコライザである．このフォークは一般には分裂していないが，標準的な忘却函手 $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ を適用すると，その結果得られる $\mathbf{Set}$ におけるフォークは分裂している．s を各余集合（G/N の元）を G における代表元に写す関数とおき，$tx = \langle x, x^{-1}(spx)\rangle$ とおいてみよ．ちなみにこの例は，任意の商群を群の圏のコイコライザと見なせる方法を与えている．

演習問題

1. **Rng** において同様の構築を与え，イデアル A による環 R の商 R/A はすべてコイコライザとして表現できることを示し，さらにその結果得られるフォークは集合への忘却函手を適用すれば分裂していることを示せ．
2. 平行対 $\partial_0, \partial_1 : a \rightrightarrows b$ は，$\partial_0 t = 1$ および $\partial_1 t \partial_0 = \partial_1 t \partial_1$ を満たす射 $t : b \to a$ が存在するとき**可縮** (contractible) であると言われる (Beck).
   (a) 任意の分裂フォーク (1) において ∂_0, ∂_1 が可縮であることを証明せよ．
   (b) 可縮な対がコイコライザを持つとき，このコイコライザは分裂していることを証明せよ．

7　Beck の定理

よく知られている代数の圏の基本的構築はコイコライザの形成である —— **Grp** では因子群を通じて，R-**Mod** では商加群を通じて，等々．Beck の定理は任意のモナド T についての T-代数の圏を，「忘却」函手が適切なコイコライザを創出するような随伴を持つ圏として特徴付けることになる．函手 $G : A \to X$ が A の平行対 $f, g : a \rightrightarrows b$ について**コイコライザを創出する** (create coequalizers) とは，X における Gf, Gg の各コイコライザ

$u : Gb \to z$ に対して一意的な対象 c と一意的な射 $e : b \to c$ が存在して $Gc = z$ および $Ge = u$ が成り立ち，さらにこの一意的な射が f と g のコイコライザであることを言う．

定理 1 （代数を特徴付ける Beck の定理）．

$$\langle F, G, \eta, \varepsilon \rangle : X \rightharpoonup A \tag{1}$$

を随伴とし，$\langle T, \eta, \mu \rangle$ をその随伴が定義する X におけるモナドとし，X^T をこのモナドについての T-代数の圏とし，

$$\langle F^T, G^T, \eta^T, \varepsilon^T \rangle : X \rightharpoonup X^T \tag{2}$$

を対応する随伴とする．このとき以下の条件は同値である．

(i) （一意的な）比較函手 $K : A \to X^T$ が同型である．
(ii) 函手 $G : A \to X$ は，Gf, Gg が X における絶対コイコライザを持つような A の平行対 f, g についてコイコライザを創出する．
(iii) 函手 $G : A \to X$ は，Gf, Gg が X における分裂コイコライザを持つような A の平行対 f, g についてコイコライザを創出する．

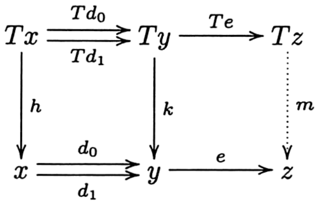
証明　最初に (i) から (ii) が従うことを示す．T-代数の二つのマップ

$$\langle x, h \rangle \overset{d_0}{\underset{d_1}{\rightrightarrows}} \langle y, k \rangle$$

を考えてみよう．これらは X における対応する射が絶対コイコライザ

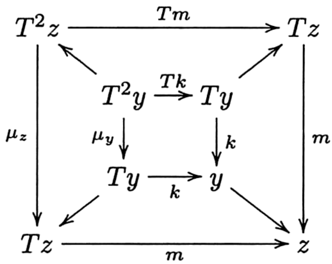
$$x \overset{d_0}{\underset{d_1}{\rightrightarrows}} y \xrightarrow{e} z$$

を持つものとする．この平行対についてコイコライザを創出するには，まず e が T-代数のマップとなるような z 上の一意的な T-代数構造 $m : Tz \to z$ を考え，次にこの e が実際に T-代数の圏 X^T における d_0, d_1 のコイコライザであることを証明しなければならない．しかし図式



の左側において，d_0 と d_1 は代数のマップなので（d_0 による）上の四角と（d_1 による）下の四角は両方とも可換になる．このことから ek は Td_0 と合成しても Td_1 と合成しても等しいことが従う．しかし e は絶対コイコライザなので，Te もやはりコイコライザである．それゆえ一意的な垂直なマップ m が上図のように存在し，右の四角図式を可換にする．

さて，ここでこの m が z の構造射であることを示したい．図式



(3)

によって，m についての結合律（上図の外側の四角）は構造射 k についての結合律（上図の内側の四角）と比較できる．左側の台形は μ が自然なので可換となり，他の三つの台形は k と e を用いた m の定義により可換になる．それゆえ

$$m \circ Tm \circ T^2 e = m \circ \mu_z \circ T^2 e$$

である．しかし e は絶対コイコライザなので $T^2 e$ はコイコライザであり，したがってエピである．$T^2 e$ を簡約することにより m の結合律が得られる．同じスタイルの議論により m が単位元律 $m \circ \eta_z = 1 : z \to z$ を満たすことが証明される．

こうして望んでいた z 上の一意的な T-代数構造 m を見出した．m の構築により e は T-代数のマップとなる．e が X^T におけるコイコライザであることを示すために，$fd_0 = fd_1$ を満たす T-代数の他の任意のマップ $f : \langle y, k \rangle \to \langle w, n \rangle$ を考えよう．このとき $f : y \to w$ は $fd_0 = fd_1$ を満たす X の射であり，e は

$d_0, d_1 : x \rightrightarrows y$ の（絶対）コイコライザである．それゆえ $f = f'e$ を満たすマップ $f' : z \to w$ が存在する．図式 (3) についてのちょうど同じような議論により，f' は実際に T-代数のマップであることが示される．それは $f = f'e$ を満足する一意的なものであり，これにより e が X^T のコイコライザであることの証明が完了し，ゆえに (i) から (ii) が従う．

次に，すべての分裂コイコライザは絶対コイコライザであり，ゆえに定理の条件 (ii) は条件 (iii) よりもさらに G の創出性を要求する．それゆえ (ii) から (iii) が従う．

残りは (iii) から (i) が従うことを証明することである．準備として T-代数 $\langle x, h\rangle$ を考えよう．$h : Tx \to x$ がある代数の構造射であるという条件は，ちょうど

$$T^2x \underset{Th}{\overset{\mu_x}{\rightrightarrows}} Tx \xrightarrow{h} x \tag{4}$$

が X におけるフォークであって，$T^2x \xleftarrow{\eta_{Tx}} Tx \xleftarrow{\eta_x} x$ によって分裂しているという条件になる．実際 (4) についてのフォーク条件 $h \circ \mu_x = h \circ Th$ はちょうど h の結合律であり，合成 $h \circ \eta_x$ は $\langle x, h\rangle$ の単位元律により 1 であり，またモナド T の単位元律と η の自然性により等式

$$\mu_x \circ \eta_{Tx} = 1, \qquad Th \circ \eta_{Tx} = \eta_x \circ h$$

が成り立つ．

各対象 $a \in A$ について随伴 $\langle F, G, \eta, \varepsilon\rangle : X \rightharpoonup A$ は A におけるフォーク

$$FGFGa \underset{FG\varepsilon_a}{\overset{\varepsilon_{FGa}}{\rightrightarrows}} FGa \xrightarrow{\varepsilon_a} a \tag{5}$$

を提供する．これを a の「カノニカルな表示 (canonical presentation)」と呼ぶ．これは $A = \mathbf{Grp}$ のときによく知られている表示に対応する．このとき ε_a は a のすべての元により生成された自由群から群 a への射影に他ならない．函手 G をフォーク (5) に適用すれば X における分裂フォークが得られる．さらに言えば，分裂フォーク (4) の特別な場合であり，このとき $\langle x, h\rangle$ は比較定理で用いられた T-代数 $\langle Ga, G\varepsilon_a\rangle$ である．

さて X において同じモナドを定義する他の任意の随伴 $\langle F', G', \eta', \varepsilon'\rangle : X \rightharpoonup A'$ を考えよう．（F と F' の）**比較** (comparison) とは，$MF' = F$ および

$GM = G'$ を満たす函手 $M : A' \to A$ を意味する．既に注意したようにこのような比較は随伴のモルフィズムであり，ゆえに $M\varepsilon' = \varepsilon M$ を満足する．

補題 2 G がコイコライザの創出について定理の仮定 (iii) を満足するとき，一意的な比較 $M : A' \to A$ が存在する．

ちなみにいまや G^T はこの仮定を満足することがわかっているので，この補題は比較定理（第 3 節）の新しい証明を提供することになる．

証明　M が存在すれば $FGM = MF'G'$ かつ $M\varepsilon' = \varepsilon M$ なので，M は a' のカノニカルな表示を Ma' のカノニカルな表示に写す．言い換えれば対象 Ma' は A におけるフォーク

$$FGFG'a' = FG'F'G'a' \overset{\varepsilon_{FG'a'}}{\underset{FG'\varepsilon'_{a'}}{\rightrightarrows}} FG'a' \overset{k}{\dashrightarrow} Ma'$$

に適合しなければならず，さらに k は $M\varepsilon'_{a'} = \varepsilon_{Ma'}$ でなければならない．このフォークを函手 G により圏 X に写してみよう．その結果は X におけるフォーク

$$GFGFG'a' \overset{G\varepsilon_{FG'a'}}{\underset{TG'\varepsilon'_{a'}}{\rightrightarrows}} GFG'a' \xrightarrow{G'\varepsilon'_{a'}} G'a'$$

であり，これは分裂している —— $T = GF$ なので，$x = G'a'$ とすればこれは上のフォーク (4) の一例である．しかし仮定 (iii) よりこの場合には G がコイコライザを創出することが保証される．それゆえ上の k と Ma' の可能な選択はちょうど一つ存在する．(さらにいったん Ma' が選択されたなら，$\varepsilon_{Ma'}$ は必要とする k の性質を持つのでこれが k でなければならない.）これは比較 M が存在すれば一意的であることを示している．

いまこの方法で k と Ma' を選択しよう．M が函手であることを示すために，A' における任意の $f : a' \to b'$ を考えよう．図式

$$\begin{array}{ccccc}
FG'F'G'a' & \rightrightarrows & FG'a' & \xrightarrow{k} & Ma' \\
\downarrow{\scriptstyle FG'F'G'f} & & \downarrow{\scriptstyle FG'f} & & \vdots{\scriptstyle Mf} \\
FG'F'G'b' & \rightrightarrows & FG'b' & \xrightarrow{k_b} & Mb'
\end{array}$$

において左側の両方の四角は可換であるので，$k_b \circ FG'f$ は上に示したように第一のコイコライザ k と一意的な射 $Ma' \to Mb'$ に分解されなければならない．この射を Mf とおけば明らかに M は函手 $A' \to A$ になるが，これはちょうど補題で要求されていることである． □

この補題により元の比較函手 $K : A \to X^T$ と比較函手 $M : X^T \to A$ の両方を構築する．このとき合成 $MK : A \to A$ は（随伴 $F \ldots$ と自分自身の）比較であり，ゆえに再び補題により恒等函手でなければならない．同様に $KM : X^T \to X^T$ は F^T と F^T の比較であり，ゆえに恒等函手でなければならない．こうして $MK = 1$ および $KM = 1$ により K が同型であることが証明されるが，これは (i) で要求されていることである． □

この定理における M の構築は，平行対について以下の余極限の「反映 (reflection)」という概念を用いればさらに解析することができる．

定義 1 函手 $G : A \to X$ が $T : J \to A$ の余極限を**反映する** (reflect) とは，T から $a \in A$ へのすべての錐 $\lambda : T \dot{\to} a$ で $G\lambda : GT \dot{\to} Ga$ が X において余極限錐であるようなものは A において既に余極限錐であることを言う．

特に G がコイコライザを反映するとは，A のすべてのフォークで X においてコイコライザになるものは既に A においてコイコライザであることを言う．同様に G が**同型を反映する**とは，A のすべての t について Gt が同型であるならば t が同型であることを言う．

Beck の定理は「precise tripleability theorem（精密なトリプル化可能性定理)」の頭字語 PTT という名称を持っている．他にも多くのバージョンがある．より多くの対のコイコライザについて仮定が存在するより証明のしやすい「弱い」バージョン（演習問題 2, 3），比較函手 $K : A \to X^T$ が同型ではなく圏の同値であるという条件を与えている「同値」バージョン（演習問題 2, 6），仮定を解析している「構成的」バージョン（ある仮定は K の左随伴を与えるのに十分である．他の仮定はこの随伴を同値にする．演習問題 2, 5），いくつかの「忘却」函手の合成にうまく適用できるような強い仮定を持つ「雑な」バージョン（CTT や VTT）（演習問題 9～11）．とはいえ VTT と CTT のより信頼すべき定義が Barr-Wells [1985] にあることには留意さ

れたい．

演習問題

（以下において「コイコライザ」は「平行対のコイコライザ」を意味する．）

1. G がコイコライザを創出するとき，コイコライザを反映もすることを証明せよ．
2. 弱いトリプル化可能性定理（Beck の定理）．随伴 (1) および対応する比較函手 K が与えられたとき，以下を直接証明せよ：
   (a) A がすべてのコイコライザを持つとき，K は左随伴 L を持つ．
   (b) それに加えて G がすべてのコイコライザを保存するとき，この随伴の単位元は同型 $I \cong KL$ である．
   (c) それに加えて G がすべてのコイコライザを反映するとき，この随伴の余単位元は同型 $LK \cong I$ である．
3. （演習問題 2 について別の仮定のおき方）．A がすべてのコイコライザを持ち，G がすべてのコイコライザを保存し，G が同型を反映するとき，G がすべてのコイコライザを反映することを証明せよ．
4. (a) T-代数 $\langle x, h\rangle$ のカノニカルな表示は

$$\langle T^2x, \mu_{Tx}\rangle \underset{Th}{\overset{\mu_x}{\rightrightarrows}} \langle Tx, \mu_x\rangle \xrightarrow{h} \langle x, h\rangle$$

   であることを示せ．
   (b) Beck の定理における比較函手 $M : X^T \to A$ はコイコライザ図式

$$FGFx \underset{Fh}{\overset{\varepsilon_{Fx}}{\rightrightarrows}} Fx \dashrightarrow M(x, h)$$

   として現れることを示せ．
5. データ (1), (2) と比較函手 K が与えられたとき，P を A の平行対 $f, g : a \rightrightarrows b$ で Gf, Gg が分裂コイコライザとなるものすべての集合とする．演習問題 4(b) を用いて以下を証明せよ．
   (a) A が P のすべての対のコイコライザを持つとき，K は左随伴 M を持つ．
   (b) それに加えて G が P のすべての対のコイコライザを保存するとき，この随伴の単位元 $\eta : I \dot{\to} KM$ は同型である．
   (c) (a) に加えて G が P のすべての対のコイコライザを反映するとき，この随伴の余単位元 $MK \dot{\to} I$ は同型である．
6. 演習問題 5 の結果と第 IV 章第 1 節定理 1 を用いて，T-代数の圏を同値を除き特徴付ける以下のバージョンの Beck の定理を証明せよ．
   データ (1), (2) が与えられたとき，以下の主張は同値である：

(i) 比較函手 $K : A \to X^T$ は圏の同値である.

(ii) f, g は Gf, Gg が絶対コイコライザを持つような任意の A の平行対であるとき，A は f, g のコイコライザを持ち，G はこれらの対のコイコライザを保存し反映する.

(iii) 同じ命題で「絶対コイコライザ」を「分裂コイコライザ」に置き換えたもの.

続く演習問題では函手 $G : A \to X$ についての性質 CTT, VTT, PTT という若干の定義を用いる．C_G を（同様に S_G を）A における平行対 $\langle f, g\rangle$ で $\langle Gf, Gg\rangle$ が X においてコイコライザを（同様に分裂コイコライザを）持つようなものすべての集合とする．このとき G が CTT を持つとは，G が左随伴を持ち，さらに存在するすべてのコイコライザを保存かつ反映し，A が C_G のすべての対のコイコライザを持つことを言う．次に G が VTT を持つとは，G が左随伴を持ち，さらに S_G のすべての対のコイコライザを反映し，A が S_G のすべての対の分裂コイコライザを持つことを言う．最後に G が PTT を持つとは，G が左随伴を持ち，さらに S_G のすべての対のコイコライザを保存かつ反映し，A が S_G のすべての対のコイコライザを持つことを言う．明らかに CTT と VTT から PTT が従う.

7. CTT (Crude Tripleability Theorem; Bar-Beck)（粗雑なトリプル化可能性定理）．G が CTT であるとき比較函手 K は圏の同値であることを証明せよ.
8. VTT (Vulgar Tripleability Theorem)（卑俗なトリプル化可能性定理）．G が VTT であるとき，比較函手は圏の同値であることを証明せよ.
9. 函手 $G_1 : A \to X$, $G_2 : X \to Y$, $G_3 : Y \to Z$ が与えられて G_1 が CTT，G_2 が PTT，G_3 が VTT であるとき，合成函手 $G_3G_2G_1$ が PTT であることを証明せよ.
10. 二つの VTT である函手の合成は VTT であることを証明せよ.
11. 二つの CTT である函手の合成は CTT であることを証明せよ.

8　代数は T-代数である

半群，モノイド，環については，我々は既に比較函手が同型であることを知っている（第 4 節）．この結果はより一般的に第 5 章第 6 節で定義したような任意の代数多様体についても成り立つ.

定理 1 Ω を演算子の集合とし，E を（Ω の導来演算子上の）恒等式の集合とし，G をすべての小さな $\langle\Omega, E\rangle$-代数の圏 $\langle\Omega, E\rangle$-**Alg** から **Set** への忘却函手とし，T をそれらから得られる **Set** におけるモナドとする．このとき比

較函手 $K : \langle\Omega, E\rangle\text{-}\mathbf{Alg} \to \mathbf{Set}^T$ は同型である．

証明は Beck の定理を用いる．$\langle\Omega, E\rangle$-代数のモルフィズムからなる任意の平行対 $f, g : A \rightrightarrows B$ で基底関数が絶対コイコライザ e を持つものを考える．

$$GA \underset{Gg}{\overset{Gf}{\rightrightarrows}} GB \xrightarrow{\;e\;} X\ . \tag{1}$$

「コイコライザを創出する」ためには，集合の写像 e が一意的な代数のモルフィズム $B \to ?$ に持ち上がり，そのときこの写像が代数のマップ f, g のコイコライザであることを示さなければならない．そこで，集合 A と B への作用 ω_A と ω_B が与えられている任意の n 項演算子 $\omega \in \Omega$ を考える（通常通りに代数 A とその基底集合 $|A|$ を混同する）．以下の図式において（右側の四角図式は無視する）

$$\begin{array}{ccccccc}
A^n & \underset{g^n}{\overset{f^n}{\rightrightarrows}} & B^n & \xrightarrow{e^n} & X^n & \overset{h'^n}{\cdots\cdots>} & C^n \\
{\scriptstyle\omega_A}\downarrow & & {\scriptstyle\omega_B}\downarrow & & \vdots\,{\scriptstyle\omega_X} & & \downarrow{\scriptstyle\omega_C} \\
A & \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} & B & \xrightarrow{e} & X & \overset{h'}{\cdots\cdots>} & C
\end{array} \tag{2}$$

f と g は Ω-代数のモルフィズムなので左側の（f と g それぞれについての）二つの四角図式は可換である．関数 e は $\mathbf{Set}$ の絶対コイコライザであり，それゆえその n 乗 e^n もやはり（f^n と g^n の）コイコライザである．しかし

$$e\omega_B f^n = ef\omega_A = eg\omega_A = e\omega_B g^n$$

なので，$e\omega_B$ は $e\omega_B = \omega_X e^n$ のようにこのコイコライザを通じて一意的に分解されなければならない．これは四角図式 (2) が可換になるような，すなわち e が Ω-代数のモルフィズムになるような X 上の演算 ω_X を定義している．同じ図式はすべての導来演算子 λ に適用されて λ_X が一意的に定義される．このことから B において妥当な任意の恒等式 $\lambda_B = \mu_B$ は X においても妥当であり，よって X は $\langle\Omega, E\rangle$-代数である．

残っているのは，e が代数のコイコライザであることを示すことである．そこで，代数の任意のモルフィズム $h : B \to C$ で $hf = hg$ となるものを考えてみよう．このとき $\mathbf{Set}$ において $hf = hg$ であり（忘却函手 G を適用す

る），h は一意的な関数 h' について $h = h'e$ と分解される．さて，上の (2) の右側の四角図式がすべての演算子 ω について可換になることを示さなければならない．しかし h は代数のモルフィズムであり，よって

$$h'\omega_X e^n = h'e\omega_B = h\omega_B = \omega_C h^n = \omega_C h'^n e^n$$

であり，e^n がコイコライザであることは e^n がエピであることを意味し，したがって $h'\omega_X = \omega_C h'^n$ が与えられる．これが求めるものである．□

演習問題

1. 絶対コイコライザではなく分裂コイコライザを用いて，定理 1 を証明せよ．各 ω_X はフォーク (1) を分裂させる $\langle s,t\rangle$ を用いて

$$\omega_X(x_1,\ldots,x_n) = e\omega_B(sx_1,\ldots,sx_n), \quad x_i \in X$$

のように定義されなければならないことに注意せよ．($n = 2$ のとき，これは普通に用いられる正規部分群の余集合の積の定義に似ていることに注目されたい.)
2. K が可換環のとき，Beck の定理は忘却函手 K-**Alg** → K-**Mod** に適用されることを示せ．

9　コンパクトハウスドルフ空間

定理 1　各（小さな）コンパクトハウスドルフ空間をその基底集合に割り当てる標準的な忘却函手

$$G : \textbf{Comp Haus} \to \textbf{Set}$$

はモナディックである．

証明　我々は既に G が左随伴 F を持つことを知っている．実際，各 FX を離散位相による集合 X のストーン–チェックのコンパクト化（第 V 章第 6 節の (2)）と見なすことができる．

（R. Paré [1971] による形式で与えられる）証明の残りのために，位相空間を集合 X と閉包演算子 $S \mapsto \overline{S}$ の対 $(X, (^-)_X)$ と見なすと便利である．閉包演算子はすべての部分集合 $S, T \subset X$ について定義されており，$\emptyset$ を空の

部分集合として標準的な性質

$$\overline{\emptyset} = \emptyset, \quad S \subset \overline{S}, \quad \overline{\overline{S}} = \overline{S}, \quad \overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$$

を満たす．このとき**連続写像** $f : (X, (\bar{\ }) _X) \to (Y, (\bar{\ })_Y)$ とは，すべての $S \subset X$ について $f\overline{S} \subset \overline{fS}$ となるような関数 $f : X \to Y$ である．同様に，関数 $f : X \to Y$ が閉であるとは，すべての $S \subset X$ について $f\overline{S} \supset \overline{fS}$ ということである．次のよく知られている事実を思い出そう．

補題 2 X がコンパクト空間であり Y がハウスドルフ空間であるとき，すべての連続な $f : (X, (\bar{\ })_X) \to (Y, (\bar{\ })_Y)$ は閉である．

我々は忘却函手 G

$$(X, (\bar{\ })_X) \mapsto X$$

が適切な対のコイコライザを創出することを検証しなければならない．そこで $f, g : (X, (\bar{\ })_X) \rightrightarrows (Y, (\bar{\ })_Y)$ を，集合 W および **Set** における絶対コイコライザ e

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{e} W$$

が存在するような連続写像の対とする．P は共変冪集合函手 **Set** $\to$ **Set** を表すものとする．すると，各部分集合 $S \subset Y$ について $(Pe)S \subset W$ は e による S の通常の順像である．e は絶対コイコライザであるので，Pe もやはりコイコライザであり，(集合の) 図式

$$\begin{array}{ccccc}
PX & \underset{Pg}{\overset{Pf}{\rightrightarrows}} & PY & \xrightarrow{Pe} & PW \\
\downarrow{\scriptstyle (\bar{\ })_X} & & \downarrow{\scriptstyle (\bar{\ })_Y} & & \vdots{\scriptstyle (\bar{\ })_W} \\
PX & \underset{Pg}{\overset{Pf}{\rightrightarrows}} & PY & \xrightarrow{Pe} & PW
\end{array} \tag{1}$$

となる．f と g は両方とも連続写像であり，左側の四角図式（f についての四角図式と g についての四角図式）は両方とも可換である．このことから

$$Pe \circ (\bar{\ })_Y \circ Pf = Pe \circ (\bar{\ })_Y \circ Pg$$

が従う．しかし Pe はコイコライザであり，そのため $Pe \circ (\bar{\ })_Y$ は Pe を通じて分解される．これにより図式の右側の四角図式を可換にする一意的な関数 $(\bar{\ })_W$ —— (1) の破線矢印 —— が得られる．したがってこの関数は以下のように記述することができる．部分集合 $T \subset W$ が与えられたとき，$(Pe)S = T$ となる任意の部分集合 $S \subset Y$ を選ぶ．すると S の選択とは独立に $\overline{T} = (Pe)\overline{S}$ となる．特に $e^{-1}T \subset Y$ を T の通常の逆像 (inverse image) とすると，$\overline{T} = Pe\overline{(e^{-1}T)}$ となる．こうなれば，これが W 上の閉包演算子であること，したがって W が位相空間であることを検証するのはお決まりの仕事である．

このとき図式の可換性により e は連続かつ閉である．Y はコンパクトであり $e : Y \to W$ は全射なので W もコンパクトである．Y はハウスドルフなので Y の各点はそこでは閉集合である．e は閉写像であり全射なので W の点は閉である．W がハウスドルフであることを示すために，二点 $w_1 \neq w_2 \in W$ を考えよう．これらは W で閉であり，$e^{-1}w_1$ と $e^{-1}w_2$ は交わりを持たない Y の閉集合である．コンパクトハウスドルフ空間 Y のよく知られている性質により，交わりを持たない閉集合は交わりを持たない開集合により分離することができる（すべてのコンパクトハウスドルフ空間は正規 (normal) である）．よって $e^{-1}w_i \in U_i$ となる開集合 $U_1, U_2 \subset Y$ が存在する．このときこれらの Y における補集合 U_1' と U_2' は閉集合であり $U_1' \cup U_2' = Y$ を満たす．e は閉写像なので，$e(U_1')$ と $e(U_2')$ は W における閉集合となり

$$(Pe)(U_1') \cup (Pe)(U_2') = W, \quad w_i \notin (Pe)(U_i')$$

となる．そこで今回は W において再び補集合を取る．それら $[(Pe)U_1']$ と $[(Pe)U_2']$ はそれぞれ w_1 と w_2 の W における交わりを持たない開近傍である．それゆえ W はハウスドルフ空間である．

Set における絶対コイコライザ e から，e が連続になるようなそのコドメイン W 上の一意的な位相が取り出された．さらにこの位相はコンパクトハウスドルフである．残っているのは，連続写像 $e : (Y, (\bar{\ })_Y) \to (W, (\bar{\ })_W)$ が **Comp Haus** におけるコイコライザであることを示すことである．よって，任意のコンパクトハウスドルフな $(Z, (\bar{\ })_Z)$ と連続写像 $h : Y \to Z$ で

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{h} Z$$

における両方の合成が等しくなるようなものを考えてみよう．e は **Set** におけるコイコライザであるので，$h = h'e : Y \to Z$ となる一意的な関数 $h' : W \to Z$ が存在する．残っているのは h' が連続であることを示すことである．$(Pe)S = T$ となる $T \subset W$ と $S \subset Y$ を取る．このとき $\overline{T} = (Pe)\overline{S}$ であり，よって

$$\begin{aligned}(Ph')\overline{T} = (Ph')(Pe)\overline{S} = P(h)\overline{S} = \overline{P(h)S} \\ = \overline{(Ph')(Pe)S} = \overline{(Ph')T}\end{aligned}$$

となる．それゆえ h' は連続（かつ閉）である．これで証明が完了した．　□

演習問題

1. 上の証明で導入された W 上の位相は，$e : Y \to W$ によって定義される W 上の「商位相」である（すなわち，W における集合が開であることと Y におけるその逆像が開であることが互いに従う）ことを示せ．

注釈

モナドとコモナドを用いることの強力さと単純さが認識されるようになるのにはとても時間がかかっており，まずはホモロジー代数で用いられることから始まった（第 VII 章第 6 節を見られたい）．Mac Lane [1956] はことのついでに（その文献の §3 で）すべての標準的分解 (standard resolution) は普遍射から（すなわち随伴から）得られるということに言及していた．次に Godement [1958] はこれらの分解を標準構成（コモナド）により体系化した．P. J. Huber [1961] は，Eckmann-Hilton の意味の「ホモトピー理論」から始めてコモナドにより定義できる導来函手の例を探究し，[1962] ではより一般的なアーベル圏についてその結果として得られる函手的単体的分解を研究した．次に Hilton（および他の人々）は任意のモナドが随伴から得られるかどうかという問いを提起した．二つの独立した解答が現れた．「自由代数」の実現という Kleisli の [1965] における構築と，モナドの代数の圏の Eilenberg-Moore [1965] による決定的な構築である．代数のこの記述に刺激されて，Barr-Beck は [1966] において，モナドとコモナドから導かれる分解をアーベル圏でない圏においてどのように用いることができるかを示した —— **Set** における自由群モナドは群の標準的コホモロジーに至るという驚くべき結果が得られた．この方向で引き続いた発展は彼らの

論文 [1969] にまとめられている．

このように 1965 年前後には，代数の圏をいかにしてモナドの上に特徴付けるかを決定することが焦点となった．Linton [1966] は **Set** におけるモナドの場合を取り扱い，それから Beck が彼の定理を確立した（出版されていないが 1966 年の会議で発表された）．Paré [1971] による絶対「コイコライザ」の形式のこの定理は，コンパクトハウスドルフ空間がモナディックであることの Paré のエレガントな証明（第 9 節）を可能にした．この方向での他の多くの発展は Manes の学位論文にまとめられている（Manes [1969] を参照）．

モナドによる代数の記述は，代数的理論 (algebraic theory)（Lawvere [1963], Pareigis [1970] に記述がある）による別の記述と密接に関係している．

第VII章　モノイド

この章では圏におけるモノイドの一般的概念について学ぶ．序章の中で既に見てきた通り，**Set** における普通のモノイドは **Set** 上でのカルテシアン積に関する通常の図式によって定義され，また一方で，環は **Ab** におけるテンソル積 $\otimes$ に関するモノイドとなる．そこで $\times$ や $\otimes$，あるいはより一般的に $\Box$ によって表示される適当な双函手を備えている圏 B から始めよう．これらの圏そのものは，双函手 $\Box : B \times B \to B$ に結合律が求められるために,「モノイダル」圏と呼ばれることになる．通常それは，同型「を除いて」のみ結合的である．たとえば，ベクトル空間のテンソル積については同型 $U \otimes (V \otimes W) \cong (U \otimes V) \otimes W$ が成り立つ．普通ならば，積を繰り返して作ったこれら二つの空間はこの同型によって単純に「同一視」される．もっとよく調べてみると，この同一視においてはさらなる注意が求められる —— つまり，正しい同型を用いる必要があり，複数の積の同一視が「一貫した (coherent)」方法で得られることを確かめなければならない．

モノイダル圏に対するコヒーレンス (coherence) の問題が解決したら，そのような圏の中でのモノイド，圏の対象へのモノイドの作用，そして自由モノイドの構成を定義することへ進んでゆく．次に，単体圏 Δ を導入する．Δ は「普遍」モノイドを含むので，また単体分解 (simplicial resolution) や単体位相 (simplicial topology) における役割からも，基本的なモノイダル圏であることがわかる．最後に，コンパクト生成空間を用いて閉なモノイダル圏を説明する．

1　モノイダル圏

ある圏がモノイダルであるとは，直積 $\times$，直和 $\oplus$，もしくはテンソル積 $\otimes$ のような「積」が備わっているときを言う．すべての場合に公平に対応するために，この積を $\Box$ で書き表す（多くの著書では $\otimes$ と書かれている）．まずはストリクトに結合的でありストリクトな両側恒等対象 e を持つ乗法 $\Box$ を備えた圏について考えよう．詳細に述べると，**ストリクトモノイダル圏** (strict monoidal category) $\langle B, \Box, e\rangle$ は結合律

$$\Box(\Box \times 1) = \Box(1 \times \Box) : B \times B \times B \to B \tag{1}$$

を満たす双函手 $\Box : B \times B \to B$ を持ち，対象 e が $\Box$ に対する左および右単位元

$$\Box(e \times 1) = \mathrm{id}_B = \Box(1 \times e) \tag{2}$$

となる圏 B である．結合律 (1) の記述において，$(B\times B)\times B$ と $B\times(B\times B)$ は同一視されており，単位元律 (2) の記述において，$e\times 1$ は函手 $c \mapsto \langle e, c\rangle : B \to B\times B$ を意味する．双函手 $\Box$ は対象 $a, b \in B$ の各対ごとに B の対象 $a\Box b$ を割り当て，射 $f : a \to a'$, $g : b \to b'$ の各対ごとに射 $f\Box g : a\Box b \to a'\Box b'$ を割り当てる．すると，$\Box$ が双函手であることは，合成射 $f'f$ および $g'g$ が定義される限り交換法則

$$1_a\Box 1_b = 1_{a\Box b}, \qquad (f'\Box g')(f\Box g) = (f'f)\Box(g'g) \tag{3}$$

が成り立つことを意味する．結合律 (1) は二項演算 $\Box$ が対象と射の**両方**について結合的であることを述べており，同様に，単位元律 (2) は対象 c について $e\Box c = c = c\Box e$ となることと射 f について $1_e\Box f = f = f\Box 1_e$ となることを意味する．

（通常の意味での，**Set** における）どんなモノイド M も，離散圏と見なせば，$\Box$ が M の要素の乗法となるようなストリクトモノイダル圏である．X が任意の圏ならば，すべての自己函手 $S : X \to X$ を対象に持ちすべての自然変換 $\theta : S \dot{\to} T$ を射に持つ圏 $\mathrm{End}(X)$ は，$\Box$ が函手の合成となるようなストリクトモノイダル圏である．

（緩い (relaxed)）モノイダル圏は双函手 $\Box$ である**乗法** (multiplication)

を持つ圏 B であって，乗法について自然同型 α「を除いて」結合的であり，また自然同型 λ を除いて $\Box$ の左単位元となり ϱ を除いて $\Box$ の右単位元となるような対象 e を持つ．さらに，α, λ および ϱ に関する「すべての」図式が可換でなければならない．

形式的に言うと，**モノイダル圏** (monoidal category) $B = \langle B, \Box, e, \alpha, \lambda, \varrho\rangle$ は，圏 B，双函手 $\Box : B \times B \to B$，対象 $e \in B$，および三つの自然同型 α, λ, ϱ からなる．明示的に示せば，

$$\alpha = \alpha_{a,b,c} : a\Box(b\Box c) \cong (a\Box b)\Box c \tag{4}$$

がすべての $a, b, c \in B$ について自然であり，五角図式

$$\begin{array}{ccccc}
a\Box(b\Box(c\Box d)) & \xrightarrow{\alpha} & (a\Box b)\Box(c\Box d) & \xrightarrow{\alpha} & ((a\Box b)\Box c)\Box d \\
\downarrow{\scriptstyle 1\Box\alpha} & & & & \uparrow{\scriptstyle \alpha\Box 1} \\
a\Box((b\Box c)\Box d) & & \xrightarrow{\qquad\alpha\qquad} & & (a\Box(b\Box c))\Box d
\end{array} \tag{5}$$

がすべての $a, b, c, d \in B$ について可換である．λ と ϱ もまたすべての対象 $a \in B$ について自然

$$\lambda_a : e\Box a \cong a, \qquad \varrho_a : a\Box e \cong a \tag{6}$$

であり，三角図式

$$\begin{array}{ccc}
a\Box(e\Box c) & \xrightarrow{\alpha} & (a\Box e)\Box c \\
\downarrow{\scriptstyle 1\Box\lambda} & & \downarrow{\scriptstyle \varrho\Box 1} \\
a\Box c & = & a\Box c
\end{array} \tag{7}$$

がすべての $a, c \in B$ について可換であり，なおかつ

$$\lambda_e = \varrho_e : e\Box e \to e \tag{8}$$

が成り立つ．

これら三つの図式からすべてのこのような図式が可換になることが，この後すぐにわかるだろう．とりあえず，これらから図式

$$\begin{array}{ccc}
e\Box(b\Box c) & \xrightarrow{\alpha} & (e\Box b)\Box c \\
\downarrow{\scriptstyle \lambda} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda\Box 1} \\
b\Box c & = & b\Box c
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
a\Box(b\Box e) & \xrightarrow{\alpha} & (a\Box b)\Box e \\
{\scriptstyle 1\Box\varrho}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varrho} \\
a\Box b & = & a\Box b
\end{array} \tag{9}$$

の可換性が従うことをよく見られたい（演習問題 1）．

有限積を持つ任意の圏は，$a\Box b$ を対象 a, b の（選ばれた任意の）積とし，e を終対象とし，さらに α, λ および ϱ をそれぞれの射影と可換になる一意的な同型射（第 III 章第 5 節命題 1）とすると，モノイダルになる．このとき五角図式 (5) は可換になり（図式の両足とも四項の積の射影と可換になる），三角図式 (7) も可換になる．同様に，有限余積を持つ任意の圏は，$\Box$ を余積とし e を始対象としてモノイダルになる．

普通の「テンソル積」はモノイダル圏を与える．たとえば，二つのアーベル群 A と B のテンソル積は，$A \times B$ からアーベル群への双線型関数の中で普遍的である関数 $A \times B \to A \otimes B$, $a, b \mapsto a \otimes b$ が存在する，という条件によって定義される．それを繰り返せば，普遍的な三引数の線型関数 $A \times (B \times C) \to A \otimes (B \otimes C)$ が得られる．そして，普遍射の一意性から，一意的な同型射 $\alpha : A \otimes (B \otimes C) \to (A \otimes B) \otimes C$ で（その一意性により）自然なものが存在する．さらに，対応する五角図式 (5) は可換になる．なぜなら，図式の両足は普遍的な四引数の線型関数の一意的な比較（射）になるからである．同型射 $\lambda : \mathbf{Z} \otimes A \cong A$ および $\varrho : A \otimes \mathbf{Z} \cong A$ はよく知られている（これらは $\mathbf{Z} \otimes A$ と A を同一視するために使われる）．結局のところ，$\langle \mathbf{Ab}, \otimes, \mathbf{Z}, \alpha, \lambda, \varrho \rangle$ はモノイダル圏となる．

Ab における $\otimes$ についての五角図式の条件 (5) は，要素 $a \in A, b \in B, c \in C$ ごとに，$\alpha[a \otimes (b \otimes c)] = (a \otimes b) \otimes c$ に注意することにより，直接確かめることもできる．これはこの条件の一つの役割を示している．つまり,「誤った」結合律射，たとえば上記のアーベル群の元に対して $\alpha'[a \otimes (b \otimes c)] = -(a \otimes b) \otimes c$ によって定義される同型射 $\alpha' : A \otimes (B \otimes C) \to (A \otimes B) \otimes C$, を使用できないようにしている．この α' については，(5) は符号のために可換にならない．

他にも多くの例がある．**Ab** のときと同様の議論によって，各可換環 K に対して $\langle K\text{-}\mathbf{Mod}, \otimes_K, K \rangle$ がモノイダルであることが示される．これと同じことが，次数付き K-加群や微分次数付き K-加群（$=$ K-加群による鎖複体 (chain complex)）についても，そのような対象のテンソル積の慣習的定義の下で成り立つ (Mac Lane [1963])．同様に，すべての K-代数（あるいは，すべての微分次数付き K-代数）からなる圏は，よく知られた代数のテンソル積の下でモノイダルになる．任意の環 R に対して，すべての R-R-双加群から

なる圏は $\otimes_R$ の下でモノイダルとなる．

モノイダル圏の（ストリクトな）**モルフィズム**

$$T : (B, \Box, e, \alpha, \lambda, \varrho) \to (B', \Box', e', \alpha', \lambda', \varrho')$$

は函手 $T : B \to B'$ で，すべての a, b, c, f および g について

$$T(a \Box b) = Ta \Box' Tb, \qquad T(f \Box g) = Tf \Box' Tg, \qquad Te = e', \tag{10}$$

$$T\alpha_{a,b,c} = \alpha'_{Ta,Tb,Tc}, \qquad T\lambda_a = \lambda'_{Ta}, \qquad T\varrho_a = \varrho'_{Ta} \tag{11}$$

を満たすものである．これらのモルフィズムを射として，すべての小さなモノイダル圏からなる圏 **Moncat** を作ることができる．この圏は（明らかな）有限積を持つ．特に，自明な（ストリクトな）モノイダル構造を持つ **1** は **Moncat** の終対象である．またすべての**ストリクトモノイダル圏**からなる充満部分圏も存在する．当然ながら，これらについてのモルフィズム T の定義から α, λ および ϱ についての条件 (11) を省くことができる．

しかしながら，モノイダル圏の間の多くの有用なモルフィズムは (10) や (11) の意味でストリクトではない．たとえば，忘却函手 $U : \langle K\textbf{-Mod}, \otimes_K, -\rangle \to \langle \textbf{Ab}, \otimes, \ldots \rangle$ はストリクトではない．実際，K-加群 A および B に対しては，等値性 $U(A \otimes_K B) = UA \otimes UB$ だけでなく同型すら得られないが，自然なモルフィズム $UA \otimes UB \to U(A \otimes_K B)$ だけは存在しており，このことは $A \otimes_K B$ が $A \otimes_Z B$ の商であるという事実を表している．忘却函手 $\langle \textbf{Ab}, \otimes, \ldots \rangle \to \langle \textbf{Set}, \times, \ldots \rangle$ についても同様な状況が現れる．モノイダル圏の間のこれらの「緩い」モルフィズムの性質を定式化することはここでは行わない（これについては第 XI 章第 2 節を参照されたい）．

B の中の同型なすべての対象を単純に同一視することによって，α や λ や ϱ に関するこまごまとしたことをすべて回避したいと思うかもしれない．Isbell による以下の議論によると，これはうまくいかない．$\textbf{Set}_0$ を集合からなる圏の骨格とする．通常通り，これは射影 p_1 および p_2 を伴う積 $X \times Y$ を持つ．D が可算集合ならば，$D = D \times D$ となり，この積の両方の射影はエピ射 $p_1, p_2 : D \to D$ となる．ここで，通常通り三つの射影について可換となるように定義された同型 $\alpha : X \times (Y \times Z) = (X \times Y) \times Z$ が常に恒等射であると仮定する．そのとき α は $X = Y = Z = D$ についても恒等射である．α は自然

なので，任意の三つの射 $f, g, h : D \to D$ に対して $f \times (g \times h) = (f \times g) \times h$ を満たす．しかし関数上の $\times$ は上の射影 p_1 および p_2 によって定義されるので，

$$fp_1 = p_1(f \times (g \times h)) = p_1((f \times g) \times h) = (f \times g)p_1 : D \to D$$

となり，p_1 はエピなので，$f = f \times g$ となる．p_2 に対する同様の議論から $f \times g = g$ が得られ，よって任意の $f, g : D \to D$ について $f = g$ となり，不合理となる．$\langle \mathbf{Ab}, \otimes, \ldots \rangle$ の骨格についても同様の議論が適用できる．

演習問題

1. (5) かつ (7) ならば (9) であることを示せ．ヒント：$a = b = e$ としたときの五角図式 (5) を考え，内側に二箇所 ϱ を加えて，基礎となる同一性 (7) を 2 回適用し，さらに，適当な自然性を考慮して $(\lambda \Box 1)\alpha\lambda = \lambda\lambda : e\Box(e\Box(c\Box d)) \to c\Box d$ を示す．このとき，(λ は同型なので) $(\lambda \Box 1)\alpha = \lambda$ となる．
2. **Moncat** における二つのモノイダル圏の積を構成せよ．
3. B がモノイダルのとき，B^{op} が（自明な）モノイダル構造を持つことを示せ．
4. B がモノイダル圏で C が任意の圏のとき，函手圏 B^C が，$(S\Box T)c = Sc\Box Tc$ で定義される乗法 $S\Box T$ と $e : C \to B$ として定数函手 e を持つモノイダル圏であることを示せ．また随伴 $B^{C\times D} \cong (B^C)^D$ がモノイダル圏の同型となることを示せ．
5. 一つの対象だけからなるストリクトモノイダル圏は二つの二項演算 $\circ$, $\Box$ を持つ集合（射の集合）であり，これらの演算は交換法則を満たし，共通の（左および右）単位元 id_e を持つことを示せ．第 II 章第 5 節演習問題 5 を応用すること．
6. 公理 (5) と (7) が独立であることを例を使って示せ．

2　コヒーレンス

コヒーレンス定理は「すべての図式は可換である」ことを主張する．より控えめに言うと，あるクラスのすべての図式は可換であると主張している．ここで問題になっているクラスの図式は，第 1 節の五角図式 (5) のように，α, λ および ϱ の射に乗法 $\Box$ を施すことによって作られるあるモノイダル圏における図式である．しかしながら，そのような図式の中の明示的もしくは形

式的に異なる二つの頂点は，ある特殊なモノイダル圏の中では，可換性を損なうような方法でも等しくなるかもしれない．よって，我々はすべての「形式的な」図式が可換になることのみを示す．ただし，形式的な図式とは,「変数」に形式的な □ 積を繰り返し施して得られるものが頂点となるような図式のことである．これらの形式的な積を「二項語」と呼ぶ．それらはちょうど，証明論の論理構文で用いられる整合論理式 (well-formed formula) や整合項 (well-formed term) のようなものである．

正確な定義は再帰的に行われる．長さが 0 の**二項語** (binary word) とは記号 e_0（空語）のことであり，長さが 1 の二項語とは記号 $(-)$（変数または代入の位置を示す記号）のことである．さらに，もし v と w がそれぞれ長さ m と n の二項語ならば，記号 $v\Box w = (v)\Box(w)$ は長さが $m+n$ の二項語である．たとえば，$((-\Box-)\Box e_0)\Box-$ は長さが 3 の二項語 —— 選択された括弧の配置と e_0 に設定された特定の引数を伴って繰り返された四項の積である．長さが等しい任意の二つの二項語 v および w について，一つの射 $v \to w$ を導入する．これらの語はこれらの射を伴って圏 W（すべての射が可逆である前順序）をなす．この圏は，乗法 $v, w \mapsto v\Box w$，単位元 e_0 と，適当な（そして必然的に一意的な）射である α, λ および ϱ を持つモノイダル圏となる．

（一意的な射 $v \to w$ という）まさにその構成によって W の中のすべての図式は可換になるだろう．このとき W から他のモノイダル圏 B へのモルフィズムは求める図式を与え，これらは B においても可換である．これらのモルフィズムは以下の定理によって与えられる．これは実質的には，W が一つの生成元 $(-)$ による自由モノイダル圏であると述べている．

定理 1 任意のモノイダル圏 B と任意の対象 $b \in B$ について，$(-) \mapsto b$ となる，モノイダル圏の一意的なモルフィズム $W \to B$ が存在する．

証明 求めるモルフィズムを $w \mapsto w_b$ と書いて，それが「語 w のすべての空白に b を代入する」ことを意味することを示唆しておく．対象 w については

$$(e_0)_b = e, \qquad (-)_b = b, \qquad (v\Box w)_b = v_b\Box w_b \tag{1}$$

とおかなければならず，帰納法によりこれらの式はすべての w_b を一意的に

定める．

固定長 n の語について，ある「基本 (basic)」グラフ $G_n = G_{n,b}$ をここで構成する．その頂点は e_0 を含まない長さが n のすべての語 w であり，その辺 $v \to w$ は B のある射 $v_b \to w_b$ と同一とする．それらを「基本 (basic)」射と呼ぶ．このとき結合律の各インスタンス［= 各コンポーネント］

$$\alpha : u_b \Box (v_b \Box w_b) \to (u_b \Box v_b) \Box w_b$$

や α^{-1} の各インスタンスは基本射であり，恒等射 $1 : v_b \to v_b$ と既に基本射 β であることがわかっているすべての射 $\beta \Box 1$ あるいは $1 \Box \beta$ も基本射である．直観的には，各基本射は，$(1 \Box \alpha) \Box (1 \Box 1)$ のような，$\Box$ 積により恒等射と組み合わされた α の一つのインスタンスである．このとき各基本射は「正に有向な (directed)」（α を含む）ものかまたは「逆に有向な (antidirectied)」（α^{-1} を持つ）ものであることをよく見られたい．それゆえ，グラフ G_n の中の u から w への経路は u_b から w_b への基本射からなる合成可能な列となる．つまり，合成によって各経路は B 上の射 $u_b \to w_b$ を得る．我々の証明のポイントは，u から w への任意の二つの経路から合成によって B 上の**同じ射** $u_b \to w_b$ が得られること —— グラフ G_n が B 上の可換図式であること —— を示すことである．

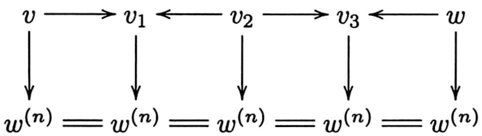
まず，すべての括弧の組が前方から始まる長さが n の一意的な語 $w^{(n)}$ を取る．長さが n の任意の w から $w^{(n)}$ への G_n 上の有向経路が存在する．実際，α のインスタンスを用いて一番外側の括弧を前方に移動させることを繰り返すことによって，カノニカルな方法でそのような経路を選ぶことができる．長さが n の任意の語 v と w に対して二つのカノニカルな経路を組み合わせて経路 $v \to w^{(n)} \to w$ を得る．この知見は，通常の結合律 $a(bc) = (ab)c$ が与えられたときの，積 ab についての「一般的な結合律」に対する周知の証明に他ならない．

語 w の**階数** (rank) ϱ を次のように再帰的に定義する．$\varrho e_0 = 0$, $\varrho(-) = 0$ とし，さらに

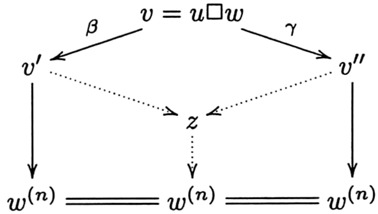
$$\varrho(v \Box w) = \varrho(v) + \varrho(w) + \mathrm{length}(w) - 1$$

とする．このとき $\varrho w = 0$ は w のすべての括弧の組が前方で始まっていることを意味することをよく見られたい．

ここで G_n が可換であることを示す．v から w への任意の経路に沿って，各頂点を「底にある」頂点 $w^{(n)}$ にカノニカルな有向経路 (directed path) を用いて結び付ける．図式



を見ればわかるように，v_i から $w^{(n)}$ への任意の二つの有向 (directed) 経路（すべてが α であり，α^{-1} がない）が等しいことを示せば十分であろう．これは $v_i = v$ の階数に関する帰納法により示される．より小さな階数を持つすべての v について成り立っていると仮定し，図のような，v から始まる（有向）基本射 β および γ を含む二つの異なる有向経路を考える．



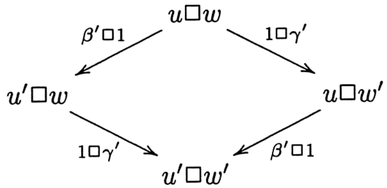
β と γ はいずれも階数を下げる．よってそれらのコドメイン v' および v'' がある共通の頂点 z への有向経路によって「再合流」し，それによって v から z へのダイヤモンド図式が可換になることを示せば十分だろう．これは場合分けによって行われる．$\beta = \gamma$ ならば，$z = v' = v''$ とすればよい．$\beta \neq \gamma$ のとき，$v = u\Box w$ として v を表すと，β は次の三つの性質のどれかを満たすことがわかる．

$\beta = \beta'\Box 1_w$	つまりβは最初の因子 u の「内側」に作用する．
$\beta = 1_u\Box\beta''$	つまりβは二番目の因子の内側に作用する．
$\beta = \alpha_{u,s,t}$	ここで $v = u\Box w = u\Box(s\Box t)$.

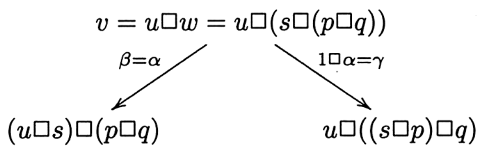
γ についても対応する三つの場合が存在する．

ここで β と γ に関する場合を比べてみよう．両方が同じ因子 u の内側に作用するとき，長さ n に関する帰納法を使うことができる．β が u の内側に作用し γ が w の内側に作用するときは，$\Box$ が双函手だから可換になるダイヤモ

ンド図式



を使えばよい．残っているのは，β または γ のどちらか，たとえば β が上記の三番目の場合のように $\beta = \alpha = \alpha_{u,s,t}$ を満たす場合である．$\gamma \neq \beta$ なので，γ は u または w の内側に作用しなくてはならない．もし γ が u の内側に作用するならば，$u\Box(s\Box t)$ から $(u'\Box s)\Box t$ へのダイヤモンド図式を使う．この図式は α が自然なので可換である．γ が $w = s\Box t$ の内側に作用し，かつ実際に s または t の内側に作用するときは，α の自然性から同様のダイヤモンド図式が得られる．これで，γ は $w = s\Box t$ の内側に作用するが，s の内側にも t の内側にも作用しない場合のみが残った．このときは γ が α のインスタンス［と 1 との □ 積］であり，t が積 $t = p\Box q$ であり，ダイヤモンド図式が



で始まらなければならない．このときダイヤモンド図式が (5) の五角図式になるように取ることによって「ダイヤモンド図式」を完成させることができる．これでグラフ G_n が B において可換であることが示せた．これによって結合律だけに関する限りはコヒーレンスの証明が完成した．

この証明に λ や ϱ を使っている部分を「混ぜ合わせる」ことは容易である．形式的に言うと，e_0 の入った語も含む長さが n のすべての語を頂点に持ち，上と全く同様に，α, λ および ϱ（およびそれらの逆変換）のインスタンスと恒等射の □ 積を取ることによって構成されるすべての基本射を辺に持つグラフ G_n' を考える．このグラフ G_n' は無限であるが，先の α のみから作った（有限な）グラフ G_n を含む．残っているのは B において G_n' が可換であることを示すことである．各語 w について，少なくとも一つの経路 $w \to w^{(n)}$ はまだ存在する．しかし，任意のそのような経路から得られる合成射は，最初に

すべての e を消し次に α を適用するような，異なる経路についての射に等しい．実際，ある α の適用を行った後で $\lambda : e\Box b \cong b$ によって e が消されるならば，e は前もって —— α の自然性か (7) か (9) のいずれかによって —— 消すことができる．さらに，(8) によって，$e\Box e$ の中で e が λ によって消されるか ϱ によって消されるかは問題ではない．結局，この簡約された経路は，ある特定の順序（たとえば，e の一番左の出現から処理する）ですべての e を消すようなあるカノニカルな経路についての射に等しい合成射を持つ．この手順によって G'_n を G_n へと変形し，G_n が可換であることから G'_n も B において可換であることを示すことができる．

そこで，この定理で求めるモルフィズム $W \to B$ を定義することができる．圏 W は長さが同じ n の語 v と w の間に唯一つの射 $v \to w$ を持つように構成されている．そこで，モルフィズムはこの射を G'_n 上の任意の経路に対する合成射 $v_b \to w_b$ へと写すことになる．なぜなら，合成射が（経路の選択に関係なく）一意的であることがわかっているからである．これと同じ一意性により，この構成で函手 $W \to B$ が定義できる．さらに任意の射 f と g について

$$f\Box g = f \circ 1\Box 1 \circ g = (f\Box 1) \circ (1\Box g)$$

が成り立つので，この函手はモノイダル圏のモルフィズムとなる．　□

このコヒーレンスの結果は辺が自然変換 α, λ および ϱ であるようなグラフによって定式化できる．これを述べるために，まず長さが n（かつ変数が一つの）各語 w が各モノイダル圏 B に対して，語 w の中の各空白 $(-)$ を B の恒等函手で置き換えて得られる，n 変数の函手 $w_B : B^n = B \times \cdots \times B \to B$ を定めることに注意されたい．(1) と同じく，この函手に対する明確な定義は再帰的に行われる．つまり，$(e_0)_B : \mathbf{1} \to B$ は定数函手 $e \in B$ であり，$(-)_B$ は恒等函手 $B \to B$ である．一方，w_B および w'_B がそれぞれ n および n' を長さに持つ語 w および w' に対して既に定義されているとすると，$(w\Box w')$ は合成函手

$$(w\Box w')_B : B^{n+n'} = B^n \times B^{n'} \xrightarrow{w_B \times w'_B} B \times B \xrightarrow{\Box} B \tag{2}$$

である．この定式化を用いると，コヒーレンスの結果は以下のようになる．

系 2 B をモノイダル圏とする．このとき同じ長さ n の語 v, w の各組を（一意的な）自然同型

$$\mathrm{can}_B(v, w) : v_B \dot{\to} w_B : B^n \to B \tag{3}$$

に写す関数が存在する．この自然同型は v_B から w_B への**カノニカルマップ**と呼ばれ，カノニカルマップは次のように定義される．恒等射 $e \to e$ は（0 変数の函手どうしの）カノニカルマップであり，恒等変換 $\mathrm{id}_B : I_B \dot{\to} I_B$ はカノニカルであり，α, α^{-1}, λ, λ^{-1}, ϱ および ϱ^{-1} はカノニカルであり，二つのカノニカルマップの合成および □ 積はカノニカルである．

この種の定式化は，次の証明で明らかになるように，定理そのもので考えられていた場合にも当てはまる．つまり，各 $b \in B$ について，同じ長さの語 v, w の各組にカノニカルな射 $\mathrm{can}_b(v, w) : v_b \to w_b$ を割り当てる関数が存在し，can_B について述べたような性質を満たす．

証明　与えられたモノイダル圏 B から，T を任意の函手 $T : B^n \to B$ としてすべての組 $\langle n, T\rangle$ を対象に持ち，すべての自然変換 $f : T \dot{\to} T'$ を射 $f : \langle n, T\rangle \to \langle n, T'\rangle$ に持つ圏 $It(B)$ を構成する．この圏の中で $\langle m, S\rangle \Box \langle n, T\rangle = \langle m + n, S \Box T\rangle$ によって乗法を定義する．ただし，$S \Box T$ は合成射

$$S \Box T : B^{m+n} \cong B^m \times B^n \xrightarrow{S \times T} B \times B \xrightarrow{\Box} B$$

であり，単位元 e を e に向かう定数函手 $\mathbf{1} \to B$ とし，各 T について，さらに各 $a \in B^n$ について，$\lambda : e \Box T \dot{\to} T$ を B の射 $\lambda_{Ta} : e \Box Ta \to Ta$ と定義する．この λ は T において自然である．同様の各点ごとの定義により ϱ と α が得られる．このとき，$It(B)$ が（緩い）モノイダル圏であることを示すのは容易であろう．

恒等函手 $I : B \to B$ は $It(B)$ の対象である．よって W が $(-)$ についての自由モノイダル圏であると述べている先の定理から（$b = I$ について）$(-) \mapsto I$ を満たすモノイダル圏の一意的なモルフィズム $W \to It(B)$ が得られる．特に，このモルフィズムは各語 w を上記の (2) で述べた函手 w_B に写し，一方で，同じ長さの v と w について，一意的な射 $v \to w$ は，(3) におけるような，$\mathrm{can}_B(v, w)$ と呼ばれる自然変換 $v_B \dot{\to} w_B$ に写される．函手はモ

ルフィズムだから，α, λ および ϱ を保存しなくてはならない．よって，語に対する我々の記法を用いると，

$$\begin{gathered}\operatorname{can}_B(e_0, e_0) = 1_e : e \stackrel{\cdot}{\to} e, \qquad \operatorname{can}_B((-),(-)) = \mathrm{id}_B : B \stackrel{\cdot}{\to} B,\\ \operatorname{can}_B(-\Box(-\Box-),(-\Box-)\Box-) = \alpha : B\Box(B\Box B) \stackrel{\cdot}{\to} (B\Box B)\Box B,\\ \operatorname{can}_B(e_0\Box-,(-)) = \lambda, \qquad \operatorname{can}_B(-\Box e_0,(-)) = \varrho,\\ \operatorname{can}_B(v\Box v', w\Box w') = \operatorname{can}_B(v,w)\Box\operatorname{can}_B(v',w')\end{gathered}$$

が成り立つ．□

この系は以下の種類のすべての図式は可換であることを述べている．

頂点． 函手 $w_B : B^n \to B$ を表す長さが n の語 w.

辺． 自然変換 1_e, id_B, α, λ, ϱ およびそれらの □ 積.

さらに，問題の函手は e, I, $-\Box-$ およびそれらの合成であり，各辺はその終端の頂点によって表される函手の間の自然変換である．

演習問題

1. 長さが 5 の二項語の間のすべてのカノニカルマップを表した図式を描け.（この図式は球の表面を 19 の領域 —— 16 の五角図式（α のインスタンス）と（自然性によって可換になる）三つの四角図式 —— に多面体分割 (polyhedral subdivision) していると見なすことができる.）
2. (Stasheff [1963])．長さが $n+3$ の語の間のすべてのカノニカルマップを与える図式は n 次元球面の表面の多面体分割と見なせることを示せ.
3. 任意の集合 X 上の自由モノイダル圏を構成し，それについて適切な普遍性を示せ.（ヒント：その対象は語であり，長さが 1 の語として任意の $x \in X$ を持つ．さらに，語の集合 W_X から X 上の自由モノイドへの全射 $W_X \to M_X$ が存在する.（一意的な）射 $v \to w$ が存在することと，v と w が M_X の中に同じ像を持つ語であることは互いに従う.）

3　モノイド

序章で提案したアイデアに従えば，いまや任意のモノイダル圏 $\langle B, \Box, e\rangle$ の中にモノイドの概念を定義することができる．

B におけるモノイド (monoid) c とは二つの射 $\mu : c\Box c \to c$, $\eta : e \to c$ を

伴う B の対象であり，次の図式が可換になるようなものである．

$$\begin{array}{ccccc} c\Box(c\Box c) & \xrightarrow{\alpha} & (c\Box c)\Box c & \xrightarrow{\mu\Box 1} & c\Box c \\ {\scriptstyle 1\Box\mu}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ c\Box c & & \xrightarrow{\quad\mu\quad} & & c \end{array} \tag{1}$$

$$\begin{array}{ccccc} e\Box c & \xrightarrow{\eta\Box 1} & c\Box c & \xleftarrow{1\Box\eta} & c\Box e \\ & {\scriptstyle\lambda}\searrow & \downarrow{\scriptstyle\mu} & \swarrow{\scriptstyle\varrho} & \\ & & c & & \end{array} \tag{2}$$

モノイドのモルフィズム $f:\langle c,\mu,\eta\rangle\to\langle c',\mu',\eta'\rangle$ は

$$f\mu=\mu'(f\Box f):c\Box c\to c',\qquad\qquad f\eta=\eta':e\to c'$$

を満たす射 $f:c\to c'$ である．これらの射によって，B におけるモノイドは圏 $\mathbf{Mon}_B$ をなし，$\langle c,\mu,\eta\rangle\mapsto c$ によって忘却函手 $U:\mathbf{Mon}_B\to B$ が定義される．

この定義は様々な場合を含む．序文においていくつかは既に述べられている．

モノイダル圏	その中のモノイド
$\langle\mathbf{Set},\times,1\rangle$	（従来の）モノイド
$\langle\mathbf{Top},\times,*\rangle$	位相モノイド
$\langle C^C,\circ,\mathrm{Id}\rangle$	モナド（第 VI 章を参照！）
$\langle\mathbf{Ab},\otimes,\mathbf{Z}\rangle$	環
$\langle K\text{-}\mathbf{Mod},\otimes_K,K\rangle$	K-代数
⟨ 次数付き加群の集まり, . . .⟩	次数付き代数
$\langle DG\text{-}K\text{-}\mathbf{Mod},\otimes_K,K\rangle$	微分次数付き K-代数
$\langle B^{\mathrm{op}},\Box^{\mathrm{op}},e\rangle$	B のコモノイド
$\langle K\text{-}\mathbf{Mod}^{\mathrm{op}},\otimes_K^{\mathrm{op}},K\rangle$	K-余代数
$\langle\mathbf{Cat},\times,\mathbf{1}\rangle$	ストリクトモノイダル圏
$\langle O\text{-}\mathbf{Grph},\times_O,O\to O\rangle$	圏（第 II 章第 7 節の (3) を参照）

モノイド $\langle c,\mu,\eta\rangle$ において任意の二つの n 項の積が等しいことを主張する「一般結合律」が存在する．具体的には，w が任意の二項語で，$w_c\in B$ が，

第2節の定理1で定義したような，w に対応する B の対象だとすると，w 項の積 μ_w は次のように再帰的に定義される射 $\mu_w : w_c \to c$ である．$w = e_0$ ならば $\mu_{e_0} : e \to c$ は η であり，$w = (-)$ ならば $\mu_{(-)} : c \to c$ は恒等射であり，$w = (-)\square(-)$ ならば μ_w は μ であり，一般に，$w = u\square v$ ならば $\mu_{u\square v}$ は自明な合成射

$$(u\square v)_c = u_c\square v_c \xrightarrow{\mu_u\square\mu_v} c\square c \xrightarrow{\mu} c \tag{3}$$

である．

命題 1　（一般結合律）．B におけるモノイド $\langle c, \mu, \eta\rangle$ に対して，同じ長さ n を持つ任意の二つの語 v および w に対する繰り返された積 μ_v および μ_w は

$$\mu_w \circ \mathrm{can}_c(v, w) = \mu_v : v_c \to c \tag{4}$$

を満たす．ただし $\mathrm{can}_c(v, w) : v_c \to w_c$ は，第2節定理1のカノニカルな射である．

証明　モノイドに関する公理 (1) と (2) はちょうど問題のカノニカルな射が α, λ または ϱ である場合の (4) である．すべてのカノニカルな射は α, λ, ϱ の合成なので，これらの場合から帰納法によって (4) が確認できる．　□

たとえば，□ によるすべての $b \in B$ の n 乗を「すべての括弧が先頭から始まる」

$$b^n = (b\square b)\square\cdots\square b \tag{5}$$

と定義することができる．すなわち $b^0 = e, b^1 = b, b^{n+1} = b^n\square b$ である．このときモノイド $\langle c, \mu, \eta\rangle$ について，n 項の積 $\mu^{(n)} : c^n \to c$ は次のように再帰的に定義される．

$$\mu^{(0)} = \eta\ , \qquad \mu^{(1)} = \mathrm{id}_c\ , \qquad \mu^{(2)} = \mu\ , \qquad \mu^{(n+1)} = \mu(\mu^{(n)}\square 1)\ . \tag{6}$$

よって (4) はよりなじみ深い等式（「一般結合律」）

$$\mu^{(n)}(\mu^{(k_1)}\square\cdots\square\mu^{(k_n)}) = \mu^{(k_1+\cdots+k_n)} \tag{7}$$

がすべての自然数 n および $k_1, \ldots, k_n$ について成り立つことも含む．

定理 2 （自由モノイドの構成）．モノイダル圏 B が可算の余積を持ち，各 $a \in B$ について函手 $a\Box-$ および $-\Box a : B \to B$ がこれらの余積を保存するならば，忘却函手 $U : \mathbf{Mon}_B \to B$ は左随伴を持つ．

注意：（$B = \mathbf{Set}$, $B = \mathbf{Ab}$ などの）多くの場合において函手 $a\Box-$ や $-\Box a$ そのものが右随伴を持つ．よって自動的に余積を保存する．

証明 $a\Box-$ が余積を保存するので，対象 $b_n \in B$ からなる各可算余積 $\coprod_n b_n$ について分配則 $\theta : \coprod_n (a\Box b_n) \cong a\Box \coprod_n b_n$ が成り立つ．実際，余積の入射 $i_n : b_n \to \coprod_n b_n$ および j_n の定義から，一意的な射 θ が存在して図式

$$
\begin{array}{ccc}
a\Box b_n & = = = = = & a\Box b_n \\
\downarrow{\scriptstyle 1\Box i_n} & & \downarrow{\scriptstyle j_n} \\
a\Box \coprod_n b_n & \overset{\theta}{\longleftarrow} & \coprod_n (a\Box b_n)
\end{array}
$$

を可換にすることがわかる．また「余積を保存する」ことは θ が同型であることに他ならない．逆も同様に構成できる．

与えられた a について，$b_n = a^n$ を (5) で定義したような n 乗とし，$\coprod_n a^n$ 上の乗法 μ を「並置」$a^m \Box a^n \cong a^{m+n}$ により定義する．形式化すると，μ は可換図式

$$
\begin{array}{ccccc}
(\coprod_m a^m)\Box(\coprod_n a^n) & \xrightarrow{\theta\circ\theta} & \coprod_{n,m} a^m \Box a^n & \xleftarrow{j_{m,n}} & a^m \Box a^n \\
 & \searrow{\scriptstyle \mu} & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{can}} \\
 & & \coprod_k a^k & \xleftarrow{i_{n+m}} & a^{m+n}
\end{array}
$$

によって定義される一意的な射である．ただし，垂直方向のマップ “can” は B に対するコヒーレンス定理によって与えられるカノニカルマップ（結合律の繰り返し）であり，φ はすべての自然数 m と n に対して余積の入射 $j_{m,n}$ および i_{n+m} で作られる四角図式を可換にする余積 $\coprod_{n,m}$ 上の一意的なマップであり，マップ $\theta \circ \theta$ は（$\Box$ が $\coprod_n$ および $\coprod_m$ 上の分配律を満たすために得られる）上記の二つのカノニカルな同型射 θ の合成であり，乗法 μ は $\mu = \varphi(\theta \circ \theta)$ である．大きな，しかしお決まりの図式によって，μ が (1) の意味で結合律を満たすことが示される（やってみよう！）．対応する単位元

$\eta_a : e \to \coprod_n a^n$ は余積の入射 $i_0 : e = a^0 \to \coprod_n a^n$ として定義される．以上を合わせると，$\langle \coprod_n a^n, \mu, \eta_a \rangle$ は B におけるモノイドになる．余積の入射 $\varrho_a = i_1 : a = a^1 \to \coprod_n a^n$ は忘却函手 $U : \mathbf{Mon}_B \to B$ への射

$$\varrho_a : a \to U\langle \textstyle\coprod_n a^n, \mu, \eta_a \rangle$$

となる．

この射は a から U への普遍射である．B における任意のモノイド $\langle c, \mu_c, \eta_c \rangle$ および B の射 $f : a \to c = U\langle c, \mu_c, \eta_c \rangle$ を考える．このとき射 $f' : \coprod_n a^n \to c$ を以下のように構成される可換図式

$$\begin{array}{ccccc}
a^n & \xrightarrow{f^n} & c^n & \xrightarrow{\mu_w} & c \\
\downarrow{\scriptstyle i_n} & & \downarrow{\scriptstyle j_n} & & \| \\
\coprod_n a^n & \dashrightarrow & \coprod_n c^n & \dashrightarrow & c
\end{array}$$

の底辺の合成射として定義する．まず，w をすべての括弧が先頭から始まるような長さが n の語とし，b^n の定義から $w_b = b^n$ となるように取る．このとき，$\mu_w : c^n \to c$ は一般結合律 (6) の中で定義される n 項の積であり，i_n および j_n は余積の入射であり，底辺にある点線の射は，余積の普遍性によって，（すべての n について）描かれた四角図式が可換になるように構成されたものである．お決まりの大きな図式によって f' がモノイドのモルフィズムになることが示せるであろう．つまり，構成によって $f' \circ \varrho_a = f$ となり，よって ϱ_a はまさに普遍的となり，それゆえに $\coprod_n a^n$ が a 上の自由モノイドとなり，これは定理の主張である．　□

この完全に形式的な証明のポイントは，同じ種類の形式化に対する多くの異なる具体例を含むことである．$B = \langle \mathbf{Set}, \times, 1, \ldots \rangle$ とすると，それは集合 a 上の自由モノイドの標準構成（第 II 章第 7 節系 2）になる．この場合 a^n は a の文字で綴られる長さが n の語の集合となり，自由モノイドは直和 $\coprod_n a^n$ となり，合成によって得られる積を伴う．もし $B = \langle K\text{-}\mathbf{Mod}, \otimes_K, K, \ldots \rangle$ ならば，K-加群 A 上のテンソル代数 $\oplus_n A^n$ の標準構成（たとえば，Mac Lane [1963b], p.179）となる．また，同じ構成から「微分次数付き」テンソル代数や自由位相モノイドなども得られる．

演習問題

1. B が有限積を持つならば，$\mathbf{Mon}_B$ も有限積を持つことを示せ．
2. （モノイドに関するコヒーレンス）．モノイド $\langle c, \mu, \eta \rangle$ のカノニカルマップ μ_w についての命題を以下のようなコヒーレンス定理に翻訳せよ．二項語 w を頂点に持ち，射 $v_c \to w_c$ を射 $v \to w$ とするグラフを考える．ただしここで $v_c \to w_c$ は，$1, \mu, \eta$，および α のインスタンス $\alpha(u'_c, v'_c, w'_c)$，λ や ϱ のインスタンス，そしてこういった射のすべての $\Box$ 積である．このグラフの任意の二つの経路 $w \to (-)$ は等しい合成射を持つことを証明し，終端がいま述べたような $(-)$ でなく長さが 2 の語 $(-)\Box(-)$ のときはこれが成り立たないことも示せ．
3. (a) （語の中への語の代入）．長さが n の各語 u は函手 $u_W : W^n \to W$ を定める．$v_1, \ldots, v_n$ を n 個の語とするとき，語 $u_W(v_1, \ldots, v_n)$ が各 v_i の長さの総和の長さを持つこと，およびそれが（直観的に言えば）語 u の n 個の空白 $(-)$ に対して $v_1, \ldots, v_n$ をこの順序で代入したものに相当することを示せ．

   (b) $w = u_W(v_1, \ldots, v_n)$ のとき，命題 1 のカノニカルマップ μ_W によって合成射

$$w_c = u_W(v_{1c}, \ldots, v_{nc}) \xrightarrow{\mu_W(\mu_{v_1} \cdots \mu_{v_n})} u_c \xrightarrow{\mu_u} c$$

   が $\mu_w : w_c \to c$ に等しくなることを示せ．この結果は命題 1 を含むことを示せ．

4　作用

再び，固定されたモノイダル圏 B の中で議論を行う．対象 $a \in B$ へのモノイド $\langle c, \mu, \eta \rangle$ の左作用 (action) とは図式

$$\begin{array}{ccccccc} c\Box(c\Box a) & \xrightarrow{\alpha} & (c\Box c)\Box a & \xrightarrow{\mu\Box 1} & c\Box a & \xleftarrow{\eta\Box 1} & e\Box a \\ \downarrow{\scriptstyle 1\Box\nu} & & & & \downarrow{\scriptstyle \nu} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda} \\ c\Box a & & \xrightarrow{\qquad\qquad\nu\qquad\qquad} & & a & = & a \end{array} \qquad (1)$$

が可換になる B の射 $\nu : c\Box a \to a$ である．たとえば，c はマップ $\mu : c\Box c \to c$ によってそれ自身に作用する．つまりこれは c の「左正規表現」である．c の左作用のモルフィズム (morphism) $f : \nu \to \nu'$ は，B の射 $f : a \to a'$ で $\nu'(1\Box f) = f\nu : c\Box a \to a'$ を満たすものである．これらのモルフィズムを射に持つことによって，固定されたモノイド c に対する左作用 ν は圏 ${}_c\mathbf{Lact}$

をなす．これらの定義は明らかに，集合への普通のモノイドの作用，アーベル群への環 R の作用として見なされる左 R-加群，上記の環を K-代数または DG-代数（DG = 微分次数付き）で置き換えたものといった，よりなじみ深い例を含んでいる．

$\langle \nu : c\Box a \to a\rangle \mapsto a$ によって定義される忘却函手 ${}_c\mathbf{Lact} \to B$ が存在する．この函手は，各 $b \in B$ に対して，合成射

$$c\Box(c\Box b) \xrightarrow{\ \alpha\ } (c\Box c)\Box b \xrightarrow{\ \mu\Box 1\ } c\Box b$$

によって定義される $c\Box b$ への c の作用を伴う $c\Box b$ を返すような左随伴を持つ．

c の右作用 $\sigma : b\Box c \to b$ も同様に定義される．また，同様の図式を可換にする a 上の c の左かつ右作用も，通常の双加群（左かつ右 R-加群）と並行して定義することができる．

演習問題

1. （Dubuc [1970]，命題 II.1.1.）．$\langle T, \eta, \mu\rangle$ を圏 X におけるモナドとする．このとき，モナド T が自己函手 $S : X \to X$ への作用を持つことと，S が $S = G^T S'$ によって T-代数の圏 X^T へ持ち上げられることは互いに従うことを示せ．さらに，これらの作用は持ち上げ $S' : X \to X^T$ に一対一に対応することを示せ．
2. （$\langle \mathbf{Cat}, \times, \ldots\rangle$ におけるモノイドのような）小さなストリクトモノイダル圏 B が圏 C に作用するとする．このとき，C の対象への B におけるモノイドの作用を定義し，これを用いて演習問題 1 の結果を任意の圏 A からの函手 $S : A \to X$ の場合へ拡張せよ．
3. K-余代数の作用を記述せよ．
4. B が $a\Box -$ の形のすべての函手によって保存される余積を持つとき，${}_c\mathbf{Lact}$ は B への忘却函手によって保存される余積を持つことを示せ．
5. 基本となる圏 B が有限積を持つとき，圏 ${}_c\mathbf{Lact}$ も，（B における）積の射影 $a \times a' \to a, a'$ が（${}_c\mathbf{Lact}$ における）作用のモルフィズムになるような仕方で，有限積を持つことを示せ．
6. （左加群と右加群のテンソル積の一般化）．B がコイコライザを持ち，c はモノイドで，$\sigma : b\Box c \to b$ は右作用，さらに $\nu : c\Box a \to a$ が左作用のとき，「テンソル積」$b\Box_c a \in B$ を，作用によって与えられる二つのマップ $b\Box(c\Box a) \to b\Box a$ のコイコライザとして構成し，$\Box_c$ が函手 $\Box_c : \mathbf{Ract}_c \times {}_c\mathbf{Lact} \to B$ となることを示せ．

7. (作用のコヒーレンス). モノイド c の左作用 $\nu : c\Box a \to a$ が与えられたとして，カノニカルマップ $\nu_w : w_{c,a} \to a$ の性質を記述せよ．ただし，w は「最後の引数」が $(-)$ である（これが何を意味するのか定義すること）ような長さが 1 以上の任意の語であり，さらに，$w_{c,a}$ は w の最後の引数に a を代入し，その他のすべての引数に c を代入した結果である．

5　単体圏

ここで，トポロジーで中心的な役割を果たす特別なストリクトモノイダル圏 Δ を書き表し，さらに「普遍的な」モノイドも与える．

この圏 Δ は，すべての有限順序数 $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ を対象に持ち，すべての（弱）単調関数を射 $f : n \to n'$ に持つ．つまり，すべての関数 f は $0 \leqq i \leqq j < n$ について $fi \leqq fj$ を満たす．この圏において，順序数 0 は始対象であり，数 1 は終対象である．**順序数の加法** (ordinal addition) は双函手 $+ : \Delta \times \Delta \to \Delta$ であり，順序数 n, m に対しては通常の（順序付きの）和 $n + m$ で定義し，射 $f : n \to n'$, $g : m \to m'$ に対しては

$$\begin{array}{rcll} (f+g)(i) & = & fi, & i = 0, \ldots, n-1 \\ & = & n' + g(i-n), & i = n, \ldots, n+m-1 \end{array}$$

によって定義したものである．(つまり関数 $f + g$ はちょうど f と g を「並べて」位置付けたものである.) さらに，$\langle \Delta, +, 0 \rangle$ はストリクトモノイダル圏である．1 は Δ の終対象なので，一意的な射 $\mu : 2 \to 1$, $\eta : 0 \to 1$ が存在する．同じ理由により，これらの射は Δ におけるモノイド $\langle 1, \mu, \eta \rangle$ をなす．それは次の意味で「普遍的」である．

命題 1 ストリクトモノイダル圏 $\langle B, \Box, e \rangle$ におけるモノイド $\langle c, \mu', \eta' \rangle$ が与えられたとき，一意的なモルフィズム $F : \langle \Delta, +, 0 \rangle \to \langle B, \Box, e \rangle$ が存在して，以下の図のように，$F1 = c$, $F\mu = \mu'$ かつ $F\eta = \eta'$ を満たす．

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \xrightarrow{\eta} & 1 & \xleftarrow{\mu} & 2 = 1 + 1 & \qquad & \langle \Delta, +, 0 \rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\, F \\ e & \xrightarrow{\eta'} & c & \xleftarrow{\mu'} & c\Box c & & \langle B, \Box, e \rangle \end{array} \qquad (1)$$

証明 この証明は，Δ の射が（二項の積 μ の）繰り返された形式的な積に他ならないことを示すことに依存している．詳しく述べると，一意的な射 $\mu^{(k)}: k \to 1$ を次のように書き下す．$\mu^{(0)} = \eta$, $\mu^{(1)}$ は恒等射，$\mu^{(2)} = \mu : 2 \to 1$,

$$\mu^{(3)} = \mu(\mu + 1) = \mu(1 + \mu) : 3 \to 1 ,$$

および，その他も同様である．1 は Δ の終対象なので，

$$\mu^{(n)}(\mu^{(k_1)} + \cdots + \mu^{(k_n)}) = \mu^{(k_1 + \cdots + k_n)} \tag{2}$$

となる．(これは「一般結合律」である.) 一方，$f : m \to n$ が Δ の任意の射で，m_i を m の部分集合 $f^{-1}i$ の要素の（普通の）数とする．このとき，

$$f = \mu^{(m_0)} + \cdots + \mu^{(m_{n-1})}, \qquad \sum_{i=0}^{n-1} m_i = m \tag{3}$$

が成り立つ（いくつかの m_i は 0 であり得ることに注意されたい）．このことから任意の f は μ と η で構成される何重かの積の和であることがわかる．

ここで命題の中で求められている函手 F について考える．$F(1) = c$ であり，かつ F はモノイダル圏のモルフィズムになるはずだから，F は $Fn = c^{(n)}$ を満たすはずである．このことから F の対象関数が定まる．次に，$F\mu = \mu'$ かつ $F\eta = \eta'$ から $F\mu^{(n)} = \mu'^{(n)}$ となり，それゆえ Δ の任意の射 f に対する表現 (3) から F の射関数 Ff が定まる．よって F は唯一である．後はこのように定義された対象関数と射関数が函手をなすことを示せばよい．しかるに Δ において，合成射は (2) で与えられ，それは B で成り立つ一般的な結合律にちょうど対応している． □

この普遍性は Δ の完全な特徴付けを与えている．その対象は 1 をもとに（+ によって）生成される自由モノイドをなす．そして射の方は，$\mu : 2 \to 1$ および $\eta : 0 \to 1$ から，μ に関する結合律や η および μ に関する左および右単位元律を使って加法と合成により生成される．

Δ の射に対する別の表し方が存在する．それは，単調関数 $f : n \to n'$ が $f = g \circ h$ として分解されるという考えに基づく．ただし，$h : n \to n''$ はある単調な全射であり，$g : n'' \to n'$ はある単調な単射である．さらに，この単射 g は g の像を与えるだけで決定され，その像は集合 n' に含まれる n''

個の順序数からなる部分集合である．特に，ちょうど $n+1$ 個の単調な単射 $n \to n+1$，つまり，$i=0,\ldots,n$ に対して i を取り除いて作った像を持つ単調な単射 $\delta_i^n : n \to n+1$，したがって，

$$\delta_i^n : n \to n+1, \qquad \delta_i^n\{0,\ldots,n-1\} = \{0,\ldots,\hat{i},\ldots,n\} \tag{4}$$

を満たす δ_i^n が存在する．ただし右辺の $\hat{i}$ は i が省かれることを意味する．これらすべての射を（上付きの添字 n を省略して）

$$0 \xrightarrow{\delta_0} 1 \underset{\delta_1}{\overset{\delta_0}{\rightrightarrows}} 2 \;\substack{\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow}\; 3\ldots, \qquad \delta_0,\ldots,\delta_n : n \to n+1 \tag{5}$$

と表示する．一方で，全射的な単調関数 $h : n \to n''$ は，$n-n''$ 個の引数 j 上では h は増加しないというような j からなる部分集合 $\{j|hj = h(j+1), 0 \leqq j \leqq n-2\}$ によって定められる．特に，次のような n 個の射 $n+1 \to n$ が存在する．$i=0,\ldots,n-1$ について

$$\sigma_i^n : n+1 \to n, \qquad \sigma_i^n(i) = \sigma_i^n(i+1). \tag{6}$$

これらを（上付きの添字なしで）

$$0 \longleftarrow 1 \xleftarrow{\sigma_0} 2 \underset{\sigma_1}{\overset{\sigma_0}{\leftleftarrows}} 3 \;\substack{\longleftarrow\\\longleftarrow\\\longleftarrow}\; 4\ldots, \qquad \sigma_0,\ldots,\sigma_{n-1} : n+1 \to n \tag{7}$$

と表示する．

これらの射もまた μ や η によって表現することができる．実際，$\delta_0 : 0 \to 1$ は η で，$\sigma_0 : 2 \to 1$ は μ，さらに定義から

$$\delta_i^n = 1_i + \eta + 1_{n-i} : n \to n+1, \qquad i = 0,\ldots,n \tag{8}$$

$$\sigma_i^n = 1_i + \mu + 1_{n-i-1} : n+1 \to n, \qquad i = 0,\ldots,n-1 \tag{9}$$

となる．

補題 2 Δ において，任意の射 $f : n \to n'$ は一意的な表現

$$f = \delta_{i_1} \circ \cdots \circ \delta_{i_k} \circ \sigma_{j_1} \circ \cdots \circ \sigma_{j_h} \tag{10}$$

を持つ．ここで，順序数 h および k は $n-h+k=n'$ を満たし，下付きの

添字 i および j の列は次を満たす.

$$n' > i_1 > \cdots > i_k \geqq 0, \qquad 0 \leqq j_1 < \cdots < j_h < n-1$$

証明 $i \in n$ に関する帰納法により，任意の単調関数 f [の値 $f(i)$] は f の像，つまり n' の部分集合と，増加しない（つまり $f(j) = f(j+1)$ となる）$j \in n-1$ の集合によって定まることが示せる．f の像に入らない n' の要素を降順に並べたものを $i_1, \ldots, i_k$ とし，f によって増加しない $n-1$ の要素を昇順に並べたものを $j_1, \ldots, j_h$ とすると，(10) の両辺の関数が等しくなることがわかる. □

特に，任意の二つの δ 形または σ 形の合成はカノニカルな形式 (10) にすることができる．このことから，これらの二成分の合成の上の三種類の等式に関する次のリストが得られる.

$$\delta_i \delta_j = \delta_{j+1} \delta_i \qquad i \leqq j, \tag{11}$$

$$\sigma_j \sigma_i = \sigma_i \sigma_{j+1} \qquad i \leqq j, \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \sigma_j \delta_i &= \delta_i \sigma_{j-1}, && i < j, \\ &= 1, && i = j,\ i = j+1, \\ &= \delta_{i-1} \sigma_j, && i > j+1 \end{aligned} \tag{13}$$

これらの等式は直接示すことができる．たとえば，(11) は任意の $j \leqq n$ に対して $\delta_i^{n+1} \delta_j^n = \delta_{j+1}^{n+1} \delta_i^n : n \to n+2$ を主張している．この等式の両辺は単調な単射であり，両辺が同じ像を持っていることが確認できる.

命題 3 すべての有限順序数を対象とする圏 Δ は，関係 (11), (12), (13) を前提にして，射 $\delta_i^n : n \to n+1$ および $\sigma_j^n : n+1 \to n$ によって生成される.

証明 上記の関係は δ 形および σ 形のものによる任意の合成を補題の一意的な形 (10) にするのに十分である. □

圏 Δ はアフィン単体によって直接的な幾何学的解釈を持つ．これらの単体によって Δ を **Top** の部分圏として表現する函手

$$\triangle : \Delta \to \mathbf{Top} \tag{14}$$

が得られる．Δ の対象 n において，$\triangle_0$ を空の位相空間となるように取り，$\triangle_{n+1}$ を「通常」の n 次元のアフィン単体，つまり，以下の点からなるユークリッド空間 $\mathbf{R}^{n+1}$ の部分空間となるように取る．

$$\triangle_{n+1} = \{p = (t_0, \ldots, t_n) | t_0 \geqq 0, \ldots, t_n \geqq 0, \Sigma t_i = 1\}$$

ここで負でない実数 t_0，…，t_n は点 $p \in \triangle_{n+1}$ の**重心座標** (barycentric coordinates) である．射 $f : n+1 \to m+1$ において，$\triangle_f : \triangle_{n+1} \to \triangle_{m+1}$ は

$$\triangle_f(t_0, \ldots, t_n) = (s_0, \ldots, s_m), \qquad s_j = \sum_{fi=j} t_i$$

によって定義される（アフィン）写像である．

（この記法で表すと）$\triangle_{n+1}$ は次元 n および $n+1$ 個の頂点を持ち，一方で，$\triangle_f$ は $\triangle_{n+1}$ の頂点 i を $\triangle_{m+1}$ の頂点 fi に写す（一意的な）アフィン写像であることによく注意されたい．たとえば，$\triangle_{\delta_i} : \triangle_{n+1} \to \triangle_{n+2}$ は，n 単体 $\triangle_{n+1}$ を $\triangle_{n+2}$ の頂点 i の反対側にある $\triangle_{n+2}$ の n 次元の面に写すアフィン写像である．幾何学的には，四面体 $\triangle_4$ の「境界」は δ_0，δ_1，δ_2 および δ_3 のもとでの $\triangle_3$ の像である四つの三角面で構成される．アフィン幾何の標準的な性質（Mac Lane-Birkhoff [1967] の第 12 章）によると，定義された $\triangle$ は函手 $\Delta \to \mathbf{Top}$ に他ならないことを証明できる（練習問題）．

この函手 $\triangle$ は，順序数 $n+1$ を n 次元単体に写すことに注意されたい．Δ は $\mathbf{Top}$ の部分圏であるが，幾何学的な次元は Δ の中で用いられる算術上の次元よりも一つ小さい．

Δ の充満部分圏で，すべての正の順序数 $\{1, 2, 3 \ldots\}$ を対象とする圏（つまり 0 だけを省いた圏）を Δ^+ で表す．トポロジスト達はこの圏を用いており，これを Δ と呼び，その対象を（幾何学的な次元を用いて）$\{0, 1, 2, \ldots\}$ で書き直している．ここでは，本当の 0 を含む，我々の Δ をそのまま使うことにする．すべての面作用 (face operation) と退化作用 (degeneracy operation) を (3) のように二成分の積 μ や単位元 η で表現するのならば，0 は必要な対象である．

Set への圏 Δ^+ 上の反変函手は「単体集合 (simplicial set)」として昔から

知られている．

そこで，圏 X における**単体対象** (simplicial object) S を函手 $S : (\Delta^+)^{\mathrm{op}} \to X$ として定義し，単体対象のモルフィズム $S \to S'$ を自然変換 $\theta : S \dot{\to} S'$ とする．この函手 S を，S_n が**幾何学的な次元** n を持つように，

$$n+1 \mapsto S_n, \qquad \delta_i \mapsto d_i, \qquad \sigma_j \mapsto s_j$$

として書き表すとき，X における単体対象は，伝統的な（そしてより複雑な）やり方で，X の対象である $S_0, S_1, \ldots, S_n, \ldots$ の並び（S_n：n 単体の対象），および $i = 0, \ldots, n$ かつ $n > 0$ に対する射（「面作用素 (face operator)」）$d_i : S_n \to S_{n-1}$，さらに $i = 0, \ldots, n$ かつ $n \geqq 0$ に対する射で (11), (12), (13) の双対である以下の恒等式を満たすもの（「退化作用素 (degeneracy operator)」）$s_i : S_n \to S_{n+1}$ によって記述される．

$$d_i d_{j+1} = d_j d_i \qquad i \leqq j, \tag{11$^{\mathrm{op}}$}$$

$$s_{j+1} s_i = s_i s_j \qquad i \leqq j, \tag{12$^{\mathrm{op}}$}$$

$$\begin{aligned} d_i s_j &= s_{j-1} d_i, & i &< j, \\ &= 1, & i &= j,\ i = j+1, \\ &= s_j d_{i-1}, & i &> j+1. \end{aligned} \tag{13$^{\mathrm{op}}$}$$

たとえば，Y がアフィン単体でその頂点が線形順序を持つとき，$d_i Y$ は頂点 i を取り除いて得られる「i 番目の面」となり，$s_i Y$ は頂点 i を二重化した退化単体 (degenerate simplex) となる．このとき上記の規則が成り立っている．

X における**添加単体対象** (augmented simplicial object) とは函手 $S' : \Delta^{\mathrm{op}} \to X$ のことである．対象 $S_{-1} \in X$ および X の一つの射 $\varepsilon : S_0 \to S_{-1}$ で $\varepsilon d_0 = \varepsilon d_1 : S_1 \to S_{-1}$ を満たすものを見つけることによって，単体対象 S は**添加** (augment) できる（つまり，函手 S' に拡張できる）．このとき $S'(\delta_0) = \varepsilon$ となる．このような射 ε は（伝統的に）S の**添加写像** (augmentation) と呼ばれる．

アーベル圏 A（たとえば $A = \mathbf{Ab}$）における単体対象 S は，適当な「境界」作用を通じてホモロジーを与える．明確に述べると S から射

$$S_0 \xleftarrow{\ \partial\ } S_1 \xleftarrow{\ \partial\ } S_2 \xleftarrow{\ \partial\ } \cdots \tag{15}$$

が構成される．ここで**境界準同型** (boundary homomorphism) $\partial : S_{n+1} \to S_n$ は交代和 $\partial = d_0 - d_1 + \cdots + (-1)^{n+1} d_{n+1}$ として定義される射である．面 d_i 上の関係 (11^{op}) により $\partial\partial = 0$ が成り立つ．(これは図式 (15) が A における鎖複体であることを意味する.) $\partial\partial = 0$ より，

$$\mathrm{Im}\{\partial : S_{n+1} \to S_n\} \leqq \mathrm{Ker}\{\partial : S_n \to S_{n-1}\}$$

となり，その商対象（第 VIII 章を参照）を S の n 番目の**ホモロジー** (homology)：

$$H_0(S) = S_0/\mathrm{Im}\{\partial : S_1 \to S_0\}$$

および

$$H_n(S) = \mathrm{Ker}\{\partial : S_n \to S_{n-1}\}/\mathrm{Im}\{\partial : S_{n+1} \to S_n\}, \qquad n > 0$$

とすることができる．函手 S の各添加写像からこの鎖複体の添加写像が得られる．つまり，$\varepsilon\partial = 0$ を満たす A の対象 S_{-1} および射 $\varepsilon : S_0 \to S_{-1}$，つまり射 $H_0(S) \to S_{-1}$ が得られる．

位相空間の特異ホモロジー (singular homology) は古典的な例である．合成函手

$$\Delta^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Top} \xrightarrow{\hom(\Delta -, \cdots)} \mathbf{Set} \xrightarrow{\mathbf{Z}} \mathbf{Ab}$$

を考える．ただし $\triangle : \Delta \to \mathbf{Top}$ は (14) で記述された函手で，一方，$\mathbf{Z}$ は各集合をその集合の要素で生成される自由アーベル群に写す．この合成によって各位相空間 X から $\mathbf{Ab}$ における添加単体対象 $S = S(X)$ が定まる．各射 $h \in \hom(\triangle_{n+1}, X)$ は X における特異 n 単体であり，それゆえ S_{n+1} はそのようなすべての単体によって生成される自由アーベル群（特異 n 単体の整数係数を持つすべての有限な線型結合の集まり）である．それに付随する鎖複体は空間 X の**特異鎖複体** (singular chain complex) であり，そのホモロジーは**特異ホモロジー**である（たとえば Mac Lane [1963a] の第 II 章を参照されたい）．

様々に変化する Δ の側面をここでまとめよう．

(a) Δ は有限順序数の圏であり，それゆえ，すべての（線形）順序集合からなる圏 $\mathbf{Ord}$ の充満部分圏である．

(b) 各順序数 n を圏（有限の前順序）と解釈すれば，Δ は **Cat** の充満部分圏であり，Δ の対象は圏 **0**, **1**, **2**, **3**, ... となる．

(c) Δ は普遍的なモノイドを含むストリクトモノイダル圏であり，その射はすべての「何重かの乗法」$\mu^{(m_0)} + \cdots + \mu^{(m_{n-1})}$ である．

(d) Δ は **Top** の充満部分圏であり，標準的順序単体（各次元に対して一つ）で構成されていて，順序を保存するアフィン写像を持つ．

Δ を通じて定義される単体対象は代数的位相幾何学における多くの問題を処理する手法，特にホモロジー，CW-複体，アイレンバーグ–マックレーン空間，およびコホモロジー作用素に対処する手法を与える．この発展の流れは May [1967]，Lamotke [1968] および Gabriel-Zisman [1967] による，圏論的手法を十分に活用した最近の研究発表の中で示されている．

演習問題

1. Δ において，射 $f : n \to n'$ がモニック（あるいはエピ）であるとき，かつそのときに限り，関数 f が単射（エピのときは全射）であることを示せ．
2. (a) Δ のすべてのモニック射からなる部分圏 $\Delta_{\mathrm{mon}} \subset \Delta$ は，関係 (11) に従って，射 δ_i によって生成されることを示せ．
   (b) Δ_{mon} のすべての射は $\eta : 0 \to 1$ および $\mathrm{id} : 1 \to 1$ による何重かの和に一意的になることを示せ．
3. (a) Δ のすべてのエピ射からなる部分圏 Δ_{epi} は関係 (12) により射 σ_i で生成されることを示せ．Δ_{epi} はストリクトモノイダル圏であることを示せ．
   (b) ストリクトモノイダル圏 $\langle C, \Box, e\rangle$ における**半群** (semigroup)$\langle c, \mu\rangle$ とは，結合律を満たす，つまり $\mu(\mu\Box 1_c) = \mu(1_c\Box\mu)$ を満たす射 $\mu : c\Box c \to c$ を持つ対象 c のことである．$2 \to 1$ は Δ_{epi} における普遍的な半群であることを示せ．
4. **Set** における単体対象からなる圏は小完備であることを示せ．

6　モナドとホモロジー

モナドとその双対であるコモナドは，この節で垣間見るように，Δ を通じてホモロジー代数における中心的な役割を果たす．$L = \langle L, \varepsilon, \delta\rangle$ を圏 A におけるコモナドとする．言い換えると，$L : A \to A$ は自己函手であり，自然変

換 $\varepsilon : L \dot{\to} \mathrm{Id}_A$, $\delta : L \dot{\to} L^2$ は

$$\delta L \cdot \delta = L\delta \cdot \delta : L \dot{\to} L^3, \qquad \varepsilon L \cdot \delta = 1_L = L\varepsilon \cdot \delta : L \dot{\to} L \tag{1}$$

を満たす．これらは第 VI 章第 1 節の (2) のモナドの定義の双対である．このことは，$\langle L, \varepsilon, \delta\rangle$ が A の自己函手からなるストリクトモノイダル圏 A^A（ただし函手ロ（乗法）は合成）におけるコモノイド (comonoid) だと言っていることになる．

ところで，Δ は普遍的なモノイド $\langle 1, 0 \to 1, 1+1 \to 1\rangle$ を持ち，よって Δ^{op} は普遍的なコモノイド $\langle 1, 1 \to 0, 1 \to 1+1\rangle$ を持つ．よって，第 5 節の命題 1 の双対により，ストリクトモノイダル圏 $\langle B, \square, e\rangle$ における任意のコモノイドは，普遍的なコモノイドをその与えられたコモノイドに写すような，モノイダル圏どうしの一意的なモルフィズム $\Delta^{\mathrm{op}} \to B$ を定める．このモルフィズム $\Delta^{\mathrm{op}} \to B$ は B における添加単体対象である（そして $(\Delta^+)^{\mathrm{op}} \to B$ は単体対象である）．

特に，A の各コモナド $\langle L, \varepsilon, \delta\rangle$ は，函手圏 A^A におけるコモノイドとして，以下のように添加単体対象（函手）$\Delta^{\mathrm{op}} \to A^A$ を定める．

$$\begin{array}{cccccc} \langle\, 1, & 0 & \longleftarrow & 1 & \longrightarrow & 1+1\,\rangle \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \langle\, L, & \mathrm{Id} & \xleftarrow{\ \varepsilon\ } & L & \xrightarrow{\ \delta\ } & L \circ L\,\rangle \end{array}$$

このとき $n \mapsto L^n = L\circ\cdots\circ L$ であり，ε は添加写像であり，$\delta = s_0 : L \to L^2$ は退化射 (degeneracy arrow) であり，さらに高い次元の面射 (face arrow) と退化射は第 5 節の等式 (8) と (9)（これらは μ や η を用いて δ や σ を表現する）の双対によって以下のように与えられる．

$$d_i^n = L^i \varepsilon L^{n-i} : L^{n+1} \dot{\to} L^n, \qquad i = 0, \ldots, n, \tag{2}$$

$$s_i^n = L^i \delta L^{n-i-1} : L^n \dot{\to} L^{n+1}, \quad i = 0, \ldots, n-1. \tag{3}$$

単体対象の全体像は以下の形をしている．

$$Smp\ L = \left\{ L \underset{d_1}{\overset{d_0}{\leftleftarrows}} L^2 \;\substack{\longleftarrow\\\longleftarrow\\\longleftarrow}\; L^3 \ldots; \qquad L \longrightarrow L^2 \rightrightarrows L^3 \ldots \right\}.$$

ここで A は **Ab** 圏（たとえば，アーベル圏）であると仮定する（または，

ある **Ab** 圏への函手を $Smp\ L$ に当てはめて考える）．このとき，面作用 d_i 上の単体の等式によって，交代和

$$\partial = d_0 - d_1 + d_2 - \cdots + (-1)^n d_n : L^{n+1}a \to L^n a$$

が $\partial\partial = 0$ を満たし，よって，添加写像 $\varepsilon_a : La \to a$ を伴い L^*a と呼ばれる鎖複体の境界準同型

$$L^*a : La \xleftarrow{\partial} L^2 a \xleftarrow{\partial} L^3 a \xleftarrow{\partial} \cdots$$

であることがわかる．この複体はホモロジー代数の見方では $a \in A$ の標準的「分解 (resolution)」であり，導来函手，特に，様々なコホモロジー函手を構成する際に役に立つ．

群のコホモロジーはある例を与える．

（加法を忘却する）忘却函手 $U : \mathbf{Rng} \to \mathbf{Mon}$ は,（随伴函手定理により）各モノイド M をモノイド環 $\mathbf{Z}M$ に写す左随伴 $\mathbf{Z}$ を持つ．特に，$M = \Pi$ が（乗法）群ならば，$\mathbf{Z}\Pi$ は群環である．つまり，その加法群は要素 $x \in \Pi$ で生成される自由アーベル群であり，その乗法は一意的な双線型写像で，すべての $x, y \in \Pi$ について $\langle x, y\rangle \to xy$，つまり Π の積を取る．**Π-Mod** は左 Π-加群 A からなる圏を表すとする．

忘却函手 $U : \mathbf{\Pi\text{-}Mod} \to \mathbf{Ab}$ は左随伴 $\mathbf{Z}(\Pi) \otimes -$ を持ち，その左随伴は各（加法）アーベル群 B を左 $\mathbf{Z}(\Pi)$-加群 $\mathbf{Z}(\Pi) \otimes B$ に写す．この随伴の単位元と余単位元は以下の写像である．

$$\begin{aligned} &\eta : B \to \mathbf{Z}(\Pi) \otimes B, && b \mapsto 1 \otimes b, && b \in B, \\ &\varepsilon : \mathbf{Z}(\Pi) \otimes UA \to A, && x \otimes a \mapsto xa, && a \in A. \end{aligned}$$

合成 $\mathbf{\Pi\text{-}Mod} \to \mathbf{Ab} \to \mathbf{\Pi\text{-}Mod}$ は圏 **Π-Mod** におけるコモナド $\langle L, \varepsilon, \delta\rangle$ を定める．ただし $L : \mathbf{\Pi\text{-}Mod} \to \mathbf{\Pi\text{-}Mod}$ は函手 $L = \mathbf{Z}(\Pi) \otimes -$（完全には $\mathbf{Z}(\Pi) \otimes U-$）であり，$\varepsilon : L \stackrel{\cdot}{\to} \mathrm{Id}$ は上記のものであり，そして $\delta : L \stackrel{\cdot}{\to} L^2$ は次によって明確に定義される自然変換 $\delta = \mathbf{Z}(\Pi) \otimes \eta U$ である．各 Π-加群 A に対して

$$\delta_A : LA = \mathbf{Z}(\Pi) \otimes A \to \mathbf{Z}(\Pi) \otimes \mathbf{Z}(\Pi) \otimes A = L^2 A,$$

$$x \otimes a \mapsto x \otimes 1 \otimes a, \qquad x \in \Pi,\ a \in A.$$

ただし 1 は群 Π の単位元である．Π-加群 $A = \mathbf{Z} =$ 自明な Π-加群と見なしてのアーベル群 $\mathbf{Z}$（すべての $x \in \Pi$ とすべての整数 m について $x \cdot m = m$）を取る．このとき $\mathbf{Z}(\Pi) \otimes \mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}(\Pi)$ および単体対象 $(Smp\ L)\mathbf{Z}$ は

$$\mathbf{Z}(\Pi) \leftleftarrows \mathbf{Z}(\Pi)^{(2)} \leftleftarrows \cdots \mathbf{Z}(\Pi)^{(n)} \leftleftarrows \mathbf{Z}(\Pi)^{(n+1)} \cdots$$

となる．ただし $\mathbf{Z}(\Pi)^{(n)}$ は n 重テンソル積 $A_n = \mathbf{Z}(\Pi) \otimes \cdots \otimes \mathbf{Z}(\Pi)$ を表す．明確に言うと，A_{n+1} は，すべての元 $x, x_i \in \Pi$ について

$$x \otimes x_i \otimes \cdots \otimes x_n = x \otimes [x_1|\cdots|x_n]$$

（右側の代案的記法は伝統的なもの）というように，すべての元が生成元となる自由アーベル群である．Π-加群構造は（$y \in \Pi$ について）

$$\langle y, x[x_1|\cdots|\cdots|x_n]\rangle \mapsto yx[x_1|\cdots|x_n]$$

によって定められる．面作用素 $d_i : \mathbf{Z}(\Pi)^{(n+1)} \to \mathbf{Z}(\Pi)^n$ は，(2) で ε によって定められたように，以下によって定まる．

$$\begin{aligned} d_i(x[x_1|\cdots|x_n]) &= xx_1[x_2|\cdots|x_n], & i &= 0, \\ &= x[x_1|\cdots|x_i x_{i+1}|\cdots|x_n], & 0 < i &< n, \\ &= x[x_1|\cdots|x_n], & i &= n. \end{aligned}$$

退化作用素 $s_i : \mathbf{Z}(\Pi)^{(n)} \to \mathbf{Z}(\Pi)^{(n+1)}$ は，(3) に従って δ で定められたように，以下の Π-加群写像になる．

$$s_i(x[x_1|\cdots|x_{n-1}]) = x[x_1|\cdots|x_{i-1}|1|x_i|\cdots|x_{n-1}] \qquad 0 \leqq i \leqq n-1.$$

Π-Mod は既にアーベル圏なので，この（添加）単体対象は以下の形の **Π-Mod** における添加鎖複体を定める．

$$\mathbf{Z} \leftarrow \mathbf{Z}(\Pi) \leftarrow \mathbf{Z}(\Pi)^{(2)} \leftarrow \cdots \leftarrow \mathbf{Z}(\Pi)^{(n)} \leftarrow \cdots.$$

これは自明な Π-加群 $\mathbf{Z}$ の「自由加群分解 (free resolution)」である．実際には，これは群 Π のホモロジーおよびコホモロジーを定義するために用いられる標準的分解である．(Mac Lane [1963]，第 IV 章第 5 節定理 1）．

Π のコホモロジーはこの分解から以下の要領で得られる．Π-加群 A と対

応する函手 $\hom_\Pi(-,A):(\Pi\text{-}\mathbf{Mod})^{\mathrm{op}}\to\mathbf{Ab}$ を取る．ここで $\hom_\Pi(-,-)$ は Π-加群準同型からなるアーベル群を表す．この函手を上記の鎖複体に適用して（添加写像 $\mathbf{Z}(\Pi)\to\mathbf{Z}$ を削除して）双対境界輪体 (coboundary) が $\delta=\hom_\Pi(\partial,A)$ の「双対鎖 (cochain)」複体

$$\hom_\Pi(\mathbf{Z}(\Pi),A)\xrightarrow{\ \delta\ }\hom_\Pi(\mathbf{Z}(\Pi)^{(2)},A)\xrightarrow{\ \delta\ }\cdots$$

を得る．この複体のコホモロジー群はまさに A の要素を係数に持つ群 Π のコホモロジー群 $H^n(\Pi,A)$ になる．先の d_i に関する式は明確に δ を与えている．よって，たとえば，$H^0(\Pi,A)=\{a|a\in A$ かつすべての x について $xa=a\}$ となる．また，$H^1(\Pi,A)$ は「微分 (crossed homomorphism)」$\Pi\to A$ からなり内部微分 (principal crossed homomorphism) を法とする群となり，さらに，$H^2(\Pi,A)$ は乗法群 Π による加法群 A のすべての群拡大からなる群であり，A の Π-加群構造によって与えられる演算（共役演算 (conjugation)）を持つ（Mac Lane [1963a]，第 IV 章第 2 節および第 3 節）．

群からなるより高次のコホモロジー群は，障害問題 (obstruction problem)（Mac Lane [1963a]，第 IV 章第 8 節）や，位相幾何学における $K(\Pi,1)$ 空間の理論（Mac Lane [1963a]，第 IV 章第 11 節）や，類体論 (Cassels-Fröhlich [1967]) に現れる．

右 Π-加群 C の要素を係数に持つ Π のホモロジーも同様の方法で見つけられる．函手 $\hom_\Pi(-,A)$ ではなく，（共変かつ加法的な）函手 $C\otimes_\Pi -:\Pi\text{-}\mathbf{Mod}\to\mathbf{Ab}$ を標準的分解に適用すればよい．結果的に得られる $\mathbf{Ab}$ における鎖複体のホモロジーは C の要素を係数に持つ Π のホモロジー $H_n(\Pi,C)$ である．たとえば（Mac Lane [1963a]，第 X 章第 5 節定理 2）

$$H_0(\Pi,\mathbf{Z})=\mathbf{Z},\qquad H_1(\Pi,\mathbf{Z})=\Pi/[\Pi,\Pi]$$

であり，後者は Π の因子交換子群である．

7 閉圏

この章で取り上げられるアイデアは，これから手短に説明されるような多くのさらなる成果を持っている．まず，モノイダル圏 B が**対称** (symmetric)

とは，B が $a, b \in B$ について自然な同型

$$\gamma_{a,b} : a \Box b \cong b \Box a \tag{1}$$

を持ち，次の図式

$$\gamma_{a,b} \circ \gamma_{b,a} = 1, \qquad \varrho_b = \lambda_b \circ \gamma_{b,e} : b \Box e \cong b \tag{2}$$

および

$$\begin{array}{ccccc} a\Box(b\Box c) & \xrightarrow{\alpha} & (a\Box b)\Box c & \xrightarrow{\gamma} & c\Box(a\Box b) \\ \downarrow{\scriptstyle 1\Box\gamma} & & & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ a\Box(c\Box b) & \xrightarrow{\alpha} & (a\Box c)\Box b & \xrightarrow{\gamma\Box 1} & (c\Box a)\Box b \end{array} \tag{3}$$

がすべて可換になることを言う．先の第 2 節のコヒーレンス定理のときと同じように，条件に対するこの選択は「すべての」このような図式の可換性を示すのに十分である (Mac Lane [1963b])．$\Box$ が圏の積または余積になっているようなモノイダル圏 $\langle B, \Box, e, \ldots \rangle$ は，$\gamma : a \times b \cong b \times a$ を射影と可換になる（カノニカルな）同型となるように与えたとき，自動的に対称的になる．これらのアイデアは第 XI 章で詳しく述べられる．

閉圏 (closed category) V は，対称モノイダル圏で，$-\Box b : V \to V$ の形の各函手が特殊な右随伴 $(\ )^b : V \to V$ を持つようなものである．たとえば，$\langle \mathbf{Ab}, \otimes, - \rangle$ は閉である．実際，アーベル群 A および B に対して，すべての準同型 $B \to A$ からなるアーベル群 $A^B = \hom(B, A)$ を取ることにより随伴が与えられる．同様に，任意の可換環 K に対して $\langle K\text{-}\mathbf{Mod}, \otimes_K, \ldots \rangle$ は閉である．**Set** や **Cat** のようなカルテシアン閉圏もまた，この意味での閉圏である．これらのすべての場合において，函手 $(\ )^b : V \to V$ は一種の「内部的な hom 函手」である．

Ab-圏（そして特にアーベル圏）は **Ab** における「hom 集合」を持つ圏として既に述べられている（第 I 章第 8 節を参照）．同様に，任意のモノイダル圏 B における「hom 集合」を持つ「圏」を次のように記述することができる．「対象」r, s, t の集合 R を考え，各対象 r, s の組に対して対象 $R(r, s) \in B$ を考え，順序付きの各三つ組に対して B の射（合成！）

$$R(s, t) \Box R(r, s) \to R(r, t)$$

を考え，各対象 r に対して B の射 $e \to R(r,r)$（単位元！）を考える．これらのデータは通常の結合律や合成の単位元公理に基づく．結果として得られたものは B-圏，B-**基底** (B-based) 圏，あるいは B に**相対的な** (relative) 圏と呼ばれる —— しばしば，B という文字を V に置き換えて V-圏と呼ばれる．しかしこの構造 R はまだ普通の意味での圏になっていないことをよく見られたい．つまり R は hom **対象** $R(r,s)$ だけを持ち，hom **集合**は持っていない．これらは hom 対象 $R(r,s)$ に適当な函手 $U : B \to \mathbf{Set}$ を適用することによって初めて得られる．たとえば，$U = B(e,-)$ により hom 集合 $UR(r,s)$ が得られる．このような hom 集合が存在するとき，通常の圏 UR は対象 $R(r,s) \in B$ によって「豊穣になった」と言う．

実際には，基底となる圏 B が単なるモノイダルでなく閉であるという条件のもとで，圏のすべての基本的な理論が豊穣圏に適用される．この発展（参考として，Dubuc [1970]，Kelly [1982] およびそこでの参照文献を参照されたい）によって，普通の圏や（相対ホモロジー代数に関する）鎖複体からなる閉圏を基底とする加法的圏，およびカルテシアン閉であるような **Top** の適当な変形を基底とする圏を同時に扱うための強力な手法が得られる．

8　コンパクト生成空間

位相空間からなる有益な圏はカルテシアン閉になるはずである．**Set** をカルテシアン閉にするよく知られた随伴

$$\mathbf{Set}(X \times Y, Z) \cong \mathbf{Set}(X, Z^Y), \qquad Z^Y = \mathbf{Set}(Y,Z) \tag{1}$$

で各 $f : X \times Y \to Z$ を $(f^{\#}x)y = f(x,y)$ を満たす $f^{\#} : X \to Z^Y$ に写す随伴は位相空間 X, Y および Z に対しても考えることができる．すべての**連続な写像** $Y \to Z$ の集合 $\mathbf{Top}(Y,Z)$ に，次に定義される**コンパクト開位相** (compact-open topology) を与えることにより，位相空間 $\mathrm{Cop}(Y,Z)$ が得られる．つまり，Y の任意のコンパクト部分集合 C および Z の任意の開部分集合 U に対して，$hC \subset U$ を満たす連続関数 $h : Y \to Z$ の全体を $N(C,U)$ とし，これを $\mathrm{Cop}(Y,Z)$ の開集合の準基とするのである．(ここでは必要としないが) 標準的な議論により，Y が局所コンパクトハウスドルフ空間ならば，

(1) の基本的な随伴 $f \mapsto f^{\#}$ を制限して随伴

$$\mathbf{Top}(X \times Y, Z) \cong \mathbf{Top}(X, \mathrm{Cop}(Y, Z)) \tag{2}$$

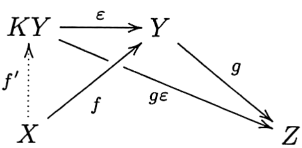
を得ることができる．

関数空間上の他の様々な位相や積空間上の他の位相を用いて，より一般的な空間 Y について上記の状態を修正しようと多くの試みがなされた．最もうまい工夫は，(圏論的な) 積 $X \mapsto X \times Y$（およびその積としての本質的な位相）が常に（一意的に定められる位相を持った関数空間になるような）右随伴を持つように，位相空間からなる圏を制限することである．

位相空間 X が**コンパクト生成** (compactly generated) であるとは，任意の部分集合 $A \subset X$ について，X のすべてのコンパクト部分集合 C と A との交わりが閉集合ならば A 自身も閉となることを言う．コンパクト生成ハウスドルフ空間（＝ケリー空間 (Kelley space)）を対象に持ち，すべての連続関数 $X \to X'$ を射に持つ圏を $\mathbf{CGHaus}$ で表す．

命題 1　$\mathbf{CGHaus}$ は $\mathbf{Haus}$ の余反映的な充満部分圏である．

証明　定義から $\mathbf{CGHaus}$ は充満部分圏である．各ハウスドルフ空間 Y に対して Y と同じ要素を持つコンパクト生成空間 KY（Y の「ケリー化 (Kelley-fication)」）を，$A \subset Y$ が KY において閉であることと，すべてのコンパクト集合 $C \subset Y$ について $A \cap C$ が Y において閉であることが同値になるように構成する．このとき Y のすべての閉集合は KY において閉であり，KY はハウスドルフであり，恒等関数 $\varepsilon_Y : KY \to Y$ は連続である．コンパクト生成ハウスドルフ空間からの任意の連続関数 $f : X \to Y$ は $f = \varepsilon f'$ によって分解される．



(3)

ただし $f' : X \to KY$ は（f と）同じ関数であり，X はコンパクト生成なので f' は連続である．このことから，ε は K から Y への普遍射であり，$\mathbf{CGHaus}$ が $\mathbf{Haus}$ において余反映的であることを示す随伴の余単位元であることがわ

かり，これが求めることであった． □

KY の記述は，位相空間 Z への関数 $g: Y \to Z$ が $g\varepsilon: KY \to Z$ として KY 上で連続であるとき，かつそのときに限り，もとの g が Y のすべてのコンパクト部分集合上で連続であることも意味している（図 (3) を参照されたい）．また，距離付け可能な空間と局所コンパクトハウスドルフ空間はコンパクト生成であることもよく見られたい．

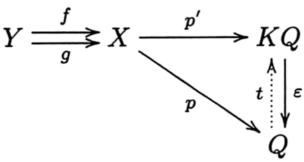
命題 2 **CGHaus** は（小）完全かつ余完全である．

証明 圏 **Haus** は完全であり（第 V 章第 9 節命題 2），K のような右随伴は極限を保存する．よって **CGHaus** は完全である．特に，**CGHaus** の二つの空間 X と Y の積（□ で書かれる）は **Haus** における「普通の」積 $X \times Y$ から

$$X \square Y = K(X \times Y) \tag{4}$$

によって得られる．言い換えれば，ケリー空間の □ 積は基底集合の積に，通常の積位相のケリー化が伴ったものである．

余完全性は簡単に示される．**Haus** におけるコンパクト生成空間の余積（＝直和）はまたコンパクト生成なので，**CGHaus** の平行対 $f, g: Y \rightrightarrows X$ のコイコライザを構成すれば十分だろう．**Haus** におけるコイコライザ $p: X \to Q$（第 V 章第 9 節命題 2）を取り，KQ を作る．



$\varepsilon: KQ \to Q$ は普遍であるため，一意的な連続関数 $p': X \to KQ$ が存在して $\varepsilon p' = p$ かつ $p'f = p'g$ を満たす．p' は **Haus** における写像でもあり，かつ p は f と g の **Haus** におけるコイコライザなので，ある連続関数 $t: Q \to KQ$ が存在して $p' = tp$ が成り立つ．このとき $p = \varepsilon p' = \varepsilon tp$ なので，$\varepsilon t = 1$ となり，$\varepsilon t \varepsilon = \varepsilon$ となる．しかし ε は（**Haus** において）モニックなので，$t\varepsilon = 1$ となり，ε は同型射となる．つまり，**Haus** におけるコイ

コライザは **CGHaus** におけるコイコライザになる. □

たとえば, A がコンパクト生成ハウスドルフ空間 X の部分集合ならば, **CGHaus** におけるコイコライザとして等化空間 (identification space) $X//A$ が得られる（A のすべてを **CGHaus** のある点に潰して得られる）. これは最大のハウスドルフ商空間 X/A（**Top** において潰したもの）であり, その位相は必然的にコンパクト生成である.

定理 3 **CGHaus** はカルテシアン閉圏である.

証明　二つのコンパクト生成ハウスドルフ空間 X および Y について, コンパクト開位相のケリー化を伴う関数空間

$$X^Y = K(\mathrm{Cop}(Y, X)) \tag{5}$$

を定義する. $e : X^Y \Box Y \to X$ を評価 $\langle f, y\rangle \mapsto fy$ によって定義する. ここで e が連続であることを示す. そのためには, $e : X^Y \times Y \to X$ がコンパクト集合上で連続であることを示せば十分である. 積空間の任意のコンパクト部分集合はその射影の積に含まれるので, e は $D \times C$ の形をした任意の集合上で連続であることを示せば十分である. ただし, D は $\mathrm{Cop}(Y, X)$ のコンパクト集合であり, C は Y のコンパクト集合である. $\langle f, y\rangle \in D \times C$ を考え, U は fy を含む X の開集合とする. $f : Y \to X$ は連続なので, C における y のある近傍 M が存在して, その閉包は $f\overline{M} \subset U$ を満たす. しかるに先の (2) で与えられる $N(\overline{M}, U)$ は $\mathrm{Cop}(Y, X)$ の準基であり, $[N(\overline{M}, U) \cap D] \times M$ は $D \times C$ の開集合で, $\langle f, y\rangle$ を含み, e によって U に写される. このことから e が連続であることがわかる.

残りは e が $-\Box Y$ から X への普遍射であることを示すことである. そこで **CGHaus** における任意の写像 $h : Z \Box Y \to X$ を考える. ここで $k = h^\#$ となる, つまり, すべての $z \in Z$ と $y \in Y$ に対して $(kz)y = h(z, y)$ を満たすような $k : Z \to \mathbf{Set}(Y, X)$ を構成する. $kz : Y \to X$ は連続であることが直接証明できるので, $kz \in X^Y$ である. 次に, $z \mapsto kz$ は連続関数 $Z \to X^Y$ であることを示す. Z はコンパクト生成なので, $Z \to \mathrm{Cop}(Y, X)$ が連続であることを示せばよい. そこで $N(C, U)$ を先のコンパクト開位相の準基による開

集合の一つとし，$kz \in N(C,U)$ を仮定する．このとき $h(\{z\} \times C) \subset U$ である．U は開集合であり，C はコンパクトであり，そして h は連続なので，z のある近傍 V が存在して $h(V \times C) \subset U$ となる．このことから $kV \subset N(C,U)$ となる．よって k は連続である．

ここで我々は可換図式

$$\begin{array}{ccc} X^Y \Box Y & \xrightarrow{e} & X \\ {\scriptstyle k\Box 1}\uparrow & \nearrow_{h} & \\ Z \Box Y & & \end{array}$$

が得られた．つまり，**Set** における随伴によって，$e(k\Box 1) = h$ を満たす k が高々一つ存在し，k が連続であることをまさに示したのであった．よって e は普遍的であり，求める随伴

$$\mathbf{CGHaus}(Z\Box Y, X) \cong \mathbf{CGHaus}(Z, X^Y) \tag{6}$$

を定義している．$\Box$ は **CGHaus** の積を定めているので，この圏はカルテシアン閉である．$\Box$

この随伴 (6) は集合間の全単射である．それに対応する関数空間どうしの同相写像

$$X^{Z\Box Y} \cong (X^Y)^Z$$

も欲しいところだが，これは随伴 (6) から圏論的な理由により得られる（第 IV 章第 6 節演習問題 3）．

ここでは圏 **CGHaus** の基本的な性質をまとめた．より広い研究（Steenrod [1967] およびその他）により，この圏が位相空間の研究のための便利な圏であることが示されている．また Dubuc-Porta [1971] は，これが位相的な代数（ゲルファントの双対性の拡張）にとって適当な圏であることを示している．結局，これは我々が **Top** において間違った数学的対象を研究していたことを示唆している．

正しい対象は **CGHaus** における空間である．

演習問題

1. Y がハウスドルフのとき，KY は，包含関係で順序付けられた，Y のコンパクト部分空間の（**Haus** における）余極限であることを示せ.
2. 空間 $X \in$ **CGHaus** の閉（または開）部分集合で通常の部分空間位相 (subspace topology) を持つものは，それ自身 **CGHaus** に含まれることを証明せよ.
3. 包含 **CGHaus** → **Haus** は余極限を創出することを証明せよ.
4. Z が局所コンパクトハウスドルフ空間で $X \in$ **CGHaus** のとき，$Z \square X = Z \times X$ を証明せよ.
5. **CGHaus** は次の圏と同値であることを証明せよ．その圏とは，すべてのハウスドルフ空間を対象に持ち，コンパクト集合上で連続なすべての関数を射 $f : X \to Y$ に持つ圏のことである.

9　ループと懸垂

ホモトピー理論のために，**基点付き** (pointed) コンパクト生成ハウスドルフ空間からなる圏 $\mathbf{CGHaus}_*$ を考える —— この圏の対象は空間 $X \in$ **CGHaus** に選ばれた基点 (base point) $*_X$ を付けたものであり，射は基点を保存する連続写像である．$X^{(*)Y}$ を基点を保存するすべての写像からなる X^Y の部分空間とする．これは閉部分空間なので，コンパクト生成である．これは自然な基点（Y のすべての要素を $*_X$ に写す連続関数）を持つ．標準的な随伴 $f \mapsto f^{\#}$,

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{CGHaus}(Z \square Y, X) & \cong & \mathbf{CGHaus}(Z, X^Y) \\
\cup & & \cup \\
\mathbf{CGHaus}_*(?, X) & \cong & \mathbf{CGHaus}_*(Z, X^{(*)Y})
\end{array}
$$

において，右側に示したような部分集合を考える．これは基点を保存する $f^{\#} : Z \to X^{(*)Y}$ の集合である．このとき $(f^{\#}z)*_Y = *_X$ かつ $(f^{\#}*_Z)y = *_X$，つまり，すべての $z \in Z$ および $y \in Y$ に対して

$$f(z, *) = * = f(*, y)$$

が成り立つ．これらは「くさび」である $Z \vee Y = (Z\square *) \cup (*\square Y)$ を一点に潰す連続関数 f に他ならない．対応する等化空間を**縮積** (smash product) と呼び，

$$(Z\square Y)//[(Z\square *) \cup (*\square Y)] = Z \wedge Y$$

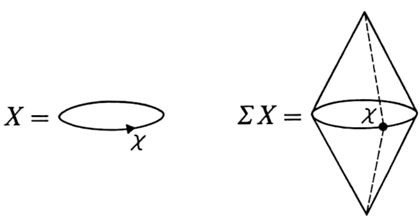
で表す（または時々 $Z\#Y$ と書く）．これは以下の随伴を与える．

$$\mathbf{CGHaus}_*(Z \wedge Y, X) \cong \mathbf{CGHaus}_*(Z, X^{(*)Y})\ . \tag{1}$$

円 S^1 は閉単位区間 $I = \{t \mid 0 \leqq t \leqq 1\}$ から等化空間 $S^1 = I//\{0,1\}$ として得ることができる．この空間を基点が $0 = +1$ となる基点付き空間と見なす．$\mathbf{CGHaus}_*$ から $\mathbf{CGHaus}_*$ への函手 Σ（**約懸垂** (reduced suspension)）および Ω（**ループ空間** (loop space)）を

$$\Sigma X = X \wedge S^1, \qquad \Omega X = X^{(*)S^1}$$

によって定義する．上記の全単射によって，$\Sigma : \mathbf{CGHaus}_* \to \mathbf{CGHaus}_*$ は Ω を右随伴として持つ．ΩX の点は X の中での基点におけるループ，つまり，$f(0) = f(1) = *_X$ を満たす連続写像 $f : I \to X$ である．一方，ΣX はシリンダー $X \times I$ であり，その上辺 $X \times \{+1\}$，底辺 $X \times \{0\}$ および生成子 $* \times I$ はすべてある一点，すなわち（新たな）基点へと潰される．つまり，同じことだが，ΣX は，下図のような，X 上の二つの錐（上辺と底辺が潰れた $X \times I$）で，$*$ 上の生成子が潰れたものである．



たとえば，$\Sigma S^1 = S^1 \wedge S^1$ は 2-球面 S^2 であり，$\Sigma^n S^1$ は $(n+1)$-球面である．随伴の単位元 $X \to \Omega\Sigma X$ は $x \in X$ を関数 $\langle x, -\rangle : I \to \Sigma X$ に写す．これは鮮明な幾何学的イメージを持っている．つまり，各点 $x \in X$ は x を通る錐の生成子へと写される．そして，この生成子は北極から南極 = 北極への

ループであり，すなわち $\Omega\Sigma X$ の点である．

操作の繰り返しによって，Σ^n は $\Omega^n : \mathbf{CGHaus}_* \to \mathbf{CGHaus}_*$ の左随伴となる．すなわち，この随伴は合成射

$$X \to \Omega\Sigma X \xrightarrow{\Omega_\eta \Sigma X} \Omega\Omega\Sigma\Sigma X \to \cdots$$

として書き表せる単位元 $X \to \Omega^n\Sigma^n X$ を持ち，Ω^n は右随伴として積を保存する，つまり $\Omega^n(X\Box Y) \cong \Omega^n X \Box \Omega^n Y$ を満たす．これらのことや類似の事実は，直接のトポロジー論的な議論によって，あるいは随伴の性質を応用することによって，得ることができる．

演習問題

1. $\mathbf{Set}_*(S, -) : \mathbf{Set}_* \to \mathbf{Set}_*$ に対する左随伴を構成せよ．
2. $\mathbf{CGHaus}_*$ における縮積は，$\mathbf{CGHaus}_*$ を二点空間を単位元に持つ対称モノイダル圏にするような自然同型を除けば可換律と結合律を満たすことを示せ．
3. $\mathbf{Top}_*$ において $- \times Y$ は（余積を保存しないので）右随伴を持たないことを示せ．
4. 経路空間函手 $P : \mathbf{CGHaus} \to \mathbf{CGHaus}$ は $PX = X^{(*)I}$ を満たす．ここで 0 が区間 I の基点として取られる．各経路 $f \in PX$ について，$f \mapsto f(1)$ は自然変換 $\pi : P \stackrel{\cdot}{\to} \mathrm{Id}$ を定義する．Ω は図式 $P \stackrel{\cdot}{\to} \mathrm{Id} \stackrel{\cdot}{\leftarrow} *$ の引き戻しとして得られる（古典的には，ΩX は $\pi_X : PX \to X$ の「ファイバー (fibre)」となる）ことを示せ．
5. Σ-Ω 随伴の余単位元を記述せよ．

注釈

モノイダル圏は，Bénabou [1963, 1964] および Mac Lane [1963b] によって初めて明確に定式化された．Bénabou はこれらの圏を「乗法を持つ圏 (catégories avec multiplication)」と呼び，マックレーンは「乗法を持つ圏 (categories with multiplication)」と呼んでいた．この名前を改めたのはアイレンバーグである．コヒーレンス定理は，Stasheff による 1963 年の高次のホモトピーの研究の中で，また Mac Lane [1963b] や Epstein [1966] によって着手された．エプシュタインはそれらの定理をスティーンロッド作用素の一般的な定義のために必要としていた．コヒーレンス定理はいまも盛んに発展している．たとえば，Lambek [1968] はゲンツェン流の証明論におけるカット除去定理との興味深い関係を見出した．彼に続いて，Kelly-Mac Lane

[1970] が閉圏に対するコヒーレンス定理を証明した．単体圏は長い間，代数的位相幾何学における境界の式で暗に示されていたが，アイレンバーグ–マックレーン空間や1950 年前後のアイレンバーグ–ジルバー定理 (Eilenberg-Zilber theorem) の研究の中で明らかになった．そして，この圏はホモロジー代数の発展の一翼を担った（第 VI 章の注釈を参照されたい）．モナドとホモロジーに関するここでの議論は，最近急増したホモロジー代数の構成に関わる概念的な理論体系に対するほんの序論に過ぎない．

コンパクト生成空間はジョン・ケリーによる一般位相についての 1955 年の本の中で初めて現れた．それらがトポロジーに役立つことは Steenrod [1967]，Gabriel-Zisman [1967]，その他によって強調された．トポロジー，とりわけスパニアによる擬位相空間 (quasi-topological space) に役立つ別の閉圏も存在する．

位相空間の懸垂 Σ はホモトピー理論の中で長い間用いられた道具である．(1951 年前後の）球面のホモトピー群を計算する難解な問題に対するカルタン–セールによる取り組みではループ空間と懸垂が本質的に用いられた．これらの構成はもともとは完全に幾何学的に見えた．それゆえ，自然な写像 $X \to \Omega\Sigma X$ はトポロジー理論の中から生まれたのだが，いまでは随伴の単位元として，概念的な言葉で表されている．

第VIII章　アーベル圏

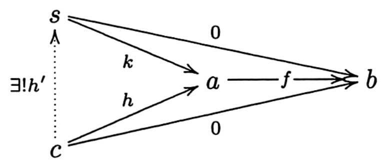
本章では，**Ab**, R-**Mod**, **Mod**-R, R-**Mod**-S のような圏において成り立つ特殊な性質を定式化する．これらの圏はすべて Ab-圏（hom 集合がアーベル群で合成が双線型）であり，すべての有限な極限と余極限が存在し，これらの極限は —— 特に核と余核は —— よい性質を持つ．このことから「アーベル」圏を表す一連の公理が導かれる．その公理系は，**Ab** において要素がどうなるかを調べることによって示されるような，可換図式や連結モルフィズム (connecting morphism) に関するすべての事実を証明するのに十分である．我々はまさにこの点を課題にする．ホモロジー代数に対するより進んだ結果については，より特殊な議論に任せることにする．

1　核と余核

圏におけるヌル対象とは始対象でありかつ終対象でもある対象だということを思い出そう（第I章第5節を参照）．C がヌル対象 z を持つとき，任意の $a, b \in C$ について一意的な射 $a \to z$ および $z \to b$ は a から b への**ゼロ射** (zero arrow) と呼ばれる合成射 $0 = 0^a_b : a \to b$ を持つ．したがって，どんな合成射でも因子のどれかがゼロ射ならば，それ自身もゼロ射である．ヌル対象は同型を除いて一意的であり，ゼロ射の概念はヌル対象の選び方に依存しない．

C がヌル対象を持つとする．射 $f : a \to b$ の核 (kernel) は射 $f, 0 : a \rightrightarrows b$ のイコライザとして定義される．より直接に言えば，$k : s \to a$ が $f : a \to b$

の核であるとは，$fk = 0$ であり，かつ $fh = 0$ を満たすすべての h が k によって一意的に（$h = kh'$ として）分解されることを言う．



それゆえ，すべてのイコライザ（あるいは，より一般的に，すべての引き戻しまたはすべての有限極限）およびゼロ射を持つ任意の圏はすべての射に対する核を持ち，f の核 $k : s \to a$ は，s の同型を除けば，一意的である．すべてのイコライザと同様に，核 k は必然的にモニックである（定義における一意的な分解の条件によって，$kg' = kh'$ ならば $g' = h'$ が成り立つ）．それゆえ核 $k : s \to a$ を a の部分対象 —— つまりモニック射 $s \to a$ の同値類 —— と見なすのは便利なことである．

たとえば，**Grp** において唯一つの元（単位元）を持つ群 I はヌル対象で，任意の二つの群についてゼロモルフィズム $G \to H$ は G のすべての元を H の単位元に写す一意的なモルフィズムである．群どうしの任意のモルフィズム $f : G \to H$ の核は，従来の核 N（すなわち $fx = 1$ を満たす $x \in G$ の全体）の埋め込み $N \to G$ である．N は G の正規部分群なので，**Grp** においてはすべての核はモニックだが，核ではないモニック射が存在することに注意されたい．

基点付き集合（第 I 章第 7 節）からなる圏 $\mathbf{Set}_*$ において，一点集合はヌル対象でゼロマップ $P \to Q$ は P のすべての要素を Q の基点 $*_Q$ に写す関数である．基点付き集合の任意のモルフィズム $f : P \to Q$ について，その核 $S \to P$ は $fx = *_Q$ を満たす $x \in P$ からなる部分集合 S の埋め込みである．ここで S の基点は P の基点に等しい．ほとんど同じ説明によって $\mathbf{Top}_*$ における核が得られる．**Grp** においては，エピモルフィズムはその核によって（同型を除いて）決定されるが，$\mathbf{Set}_*$ または $\mathbf{Top}_*$ の場合ではこのことは成り立たない．

任意の Ab-圏 A において，すべてのイコライザは核である．実際，そのような圏において各 hom 集合 $A(b, c)$ はアーベル群である．よって，平行な対

$f, g : b \to c$ が与えられたとき，第三の射 $h : a \to b$ が $fh = gh$ を満たすことと $(f-g)h = 0$ が成り立つことは同値である．それゆえ普遍的なそのような h は，f と g のイコライザまたは $f-g$ の核として表すことができる．このことが R-**Mod**, **Ab**，その他において，普通はイコライザでなく核を扱う理由である．

双対概念である余核は第 III 章第 3 節で既に述べている．

ここで圏 C がヌル対象 z とすべての射に対する核と余核を持つと仮定する．各 $c \in C$ について，c をコドメインに持つすべての射 f の集合 P_c は前順序 $\leqq$ を持つ．ただし $g \leqq f$ は g が f によって分解される（つまりある射 g' によって $g = fg'$ となる）ことを意味するように定義される．この反射律と推移律を満たす関係 $\leqq$ によって，いつものように同値関係 $\equiv$ が，$f \equiv g$ が $f \leqq g$ かつ $g \leqq f$ を意味するように定義される．この関係による射 $f \in P_c$ の同値類はある半順序集合を形成する．その半順序集合は c の部分対象（f を単射に限ったもの．そのとき $g \leqq f$ は部分対象に関する第 V 章第 7 節で既に定義された包含関係となる.）からなる半順序集合を含む．

双対的に，c をドメインに持つすべての射 u の集合 Q^c も前順序を持つ．その順序 $u \geqq v$ は v が u によって分解される（ある v' によって $v = v'u$ となる）ことを意味する．

ここで c からの各射 u に対する核と，c への各射 f に対する余核を選ぶ．このとき核および余核の定義から

$$f \leqq \ker u \Leftrightarrow uf = 0 \Leftrightarrow \operatorname{coker} f \geqq u \tag{1}$$

が成り立つ．これらの論理的な同値性は関数

$$\ker : Q^c \to P_c, \qquad \operatorname{coker} : P_c \to Q^c$$

が第 IV 章第 5 節で定義された前順序 Q^c から前順序 P_c へのガロア接続を定義することに他ならない．そのような任意の接続については，三角恒等図式から

$$\ker(\operatorname{coker}(\ker u)) = \ker u, \qquad \operatorname{coker}(\ker(\operatorname{coker} f)) = \operatorname{coker} f$$

が導かれ，g が核であることと $g = \ker(\operatorname{coker} g)$ が同値となる．これらの事

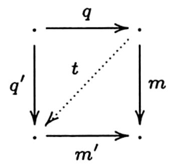
実は定義から直接導くことも容易にできる．

もし C がヌル対象，核および余核を持つならば，C の任意の射 f はカノニカルな分解

$$f = mq, \qquad m = \ker(\operatorname{coker} f) \tag{2}$$

を持つ．

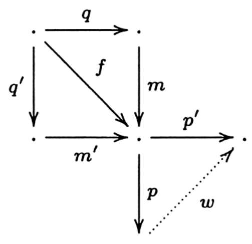
補題 1 ある核 m' について $f = m'q'$ も成り立つとき，可換図式



(3)

において $m = m't$ かつ $q' = tq$ を満たす（一意的な）対角射 t が存在する．さらに，C がイコライザを持ち，C 上のすべてのモニック射が核ならば，q はエピである．

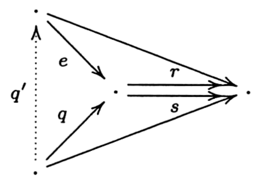
証明 仮定により，$p' = \operatorname{coker} m'$ とすると $m' = \ker p'$ が成り立つ．また $p = \operatorname{coker} m = \operatorname{coker} f$ についても同様である．



このとき $p'm' = 0$，よって $p'f = p'm'q' = 0$ となり，ある w に対して p' は p によって $p' = wp$ と分解される．よって $p'm = wpm = 0$ となり，ある一意的なモニック射 t に対して m は $m' = \ker p'$ によって $m = m't$ と分解される．さらに，$m'q' = m'tq$ となり，m' がモニックなので $q' = tq$ となる．これで求めていた図式 (3) が得られた．

次に，q がエピであることを示すために，$rq = sq$ を満たす射の平行対 r, s

を考える．



$re = se$

$rq = sq$

このとき q は r と s のイコライザ e によって分解され，ある q' について $q = eq'$，つまり $f = mq = meq'$ となる．ここで $m' = me$ はモニックなので，仮定により，これは核となる．よって，この補題の最初の結果より，ある射 t が存在して $m = m't = met$ つまり $1 = et$ が成り立つ．よってこのモニック射 e は右逆元を持つので，同型となる．ところが e は r と s のイコライザとして取ってきたので，$r = s$ となる．よって q がエピであることが示せた． □

以上により，(2) は射 f のエピ-モニック分解 (epi-monic factorization) である．

2 加法圏

Ab-圏 A は，第 I 章第 8 節で定義したように，各 hom 集合 $A(b, c)$ が（必ずしも小さいとは限らない）加法的アーベル群であり，射の合成がこの加法について双線型となるような圏である．それゆえ，各アーベル群 $A(b, c)$ は（A が前節で述べたような意味でヌル対象を持たないことがあり得るものの）**ゼロ射** と呼ばれる零元 $0 : b \to c$ を持つ．この場合も，合成は加法に関して分配律が成り立つので，ゼロ射との合成射は必然的にゼロ射である．

命題 1 Ab-圏 A における対象 z に対する以下の性質は互いに同値である．(i) z は始対象である．(ii) z は終対象である．(iii) $1_z = 0 : z \to z$．(iv) アーベル群 $A(z, z)$ は零群である．特に，A の任意の始対象（または任意の終対象）はヌル対象である．

証明　もし z が始対象ならば，一意的な写像 $z \to z$ が存在する，つまり $1_z = 0$ となり $A(z,z) = 0$ が成り立つ．もし $1_z = 0$ ならば，任意の $f : b \to z$ は $f = 1_z f = 0f = 0 : b \to z$ を満たし，それゆえ b から z への射は一意的つまり 0 となり，z は終対象となる．残りの部分は双対的な議論によって示すことができる．□

Ab-圏 A の中にヌル対象（=始対象かつ終対象である対象）z が存在するとき，一意的な射 $b \to z$ および $z \to c$ はそれぞれ $A(b,z)$ および $A(z,c)$ の零元である．よって合成 $b \to z \to c$（これは第 1 節で定義された通りゼロ射 $0 : b \to c$ である）もまたアーベル群 $A(b,c)$ の零元である．

次に Ab-圏 A における積と余積について考える．

定義 1　対象 $a, b \in A$ に対する**双積図式** (biproduct diagram) とは図式

$$a \underset{i_1}{\overset{p_1}{\rightleftarrows}} c \underset{i_2}{\overset{p_2}{\rightleftarrows}} b \tag{1}$$

のことである．ただし，射 p_1, p_2, i_1, i_2 は以下の同一性

$$p_1 i_1 = 1_a, \qquad p_2 i_2 = 1_b, \qquad i_1 p_1 + i_2 p_2 = 1_c \tag{2}$$

を満たす．

定理 2　Ab-圏 A における二つの対象 a と b が A において積を持つことと，それらが A において双積を持つことは同値である．具体的に言えば，双積図式 (1) が与えられたとき，射影 p_1 と p_2 を伴う対象 c は a と b の積となり，一方で双対的に，i_1 と i_2 を伴う c は余積となる．特に，二つの対象 a と b が A における積を持つことと，それらが A における余積を持つことは同値である．

証明　最初に条件 (2) を伴う双積図式 (1) があると仮定する．このとき

$$p_1 i_2 = p_1(i_1 p_1 + i_2 p_2) i_2 = 1 \circ p_1 i_2 + p_1 i_2 \circ 1 = p_1 i_2 + p_1 i_2.$$

よって差し引きすると $p_1 i_2 = 0$．さらに対称的な議論により $p_2 i_1 = 0$ を得る．(これらは加群の従来の双積に関するよく知られた等式である.) いま，任意の図式 $a \xleftarrow{f_1} d \xrightarrow{f_2} b$ を考える．このとき和 $h = i_1 f_1 + i_2 f_2 : d \to c$ は

$p_i h = f_i$ を満たし，逆に，もし $h' : d \to c$ が $i = 1, 2$ について $p_i h' = f_i$ を満たすならば，

$$h' = (i_1 p_1 + i_2 p_2) h' = i_1 p_1 h' + i_2 p_2 h' = i_1 f_1 + i_2 f_2$$

となり $h' = h$ となる．このことから，$i = 1, 2$ について $p_i h = f_i$ を満たす一意的な $h : d \to c$ が存在し，よって図式 $a \xleftarrow{p_1} c \xrightarrow{p_2} b$ はまさに積である．また，割り当て $h \mapsto \langle f_1, f_2 \rangle$ はアーベル群どうしの同型

$$A(d, c) \cong A(d, a) \oplus A(d, b)$$

である．ここで右辺の $\oplus$ はアーベル群どうしの直和である．

逆に，積図式 $a \xleftarrow{p_1} a \times b \xrightarrow{p_2} b$ が与えられたとき，この積の定義から $p_1 i_1 = 1_a$ と $p_2 i_1 = 0$ をコンポーネントとする一意的な射 $i_1 : a \to a \times b$ および $p_1 i_2 = 0, p_2 i_2 = 1_b$ を満たす一意的な射 $i_2 : b \to a \times b$ が存在する．このとき

$$p_1(i_1 p_1 + i_2 p_2) = p_1 + 0 p_2 = p_1, \qquad p_2(i_1 p_1 + i_2 p_2) = p_2$$

となり，$i_1 p_1 + i_2 p_2 : a \times b \to a \times b$ は p_1 と p_2 をコンポーネントとする一意的な射，つまり $1_{a \times b}$ となる．それゆえ与えられた積図式から (1) と (2) が成り立ち，実際に双積が得られる． □

Ab や R-**Mod** のような特別な圏においては，双積はしばしば**直和** (direct sum) と呼ばれる．双積図式は対象 a, b, c およびそれらの間の射のみを用いて定義されているので，その描写は「内部的 (internal)」であることにも注意されたい．一方，積（または余積）に対する通常の圏論的な描写は，圏全体における射の構成によって表されるため,「外部的 (external)」である．

対象 $a, b \in A$ が与えられたとき，双積図式 (1) は，もし存在するならば，対象 c の同型を除いて一意的に決められる．すべてのそのような双積が存在するとき，各対 $\langle a, b \rangle$ に対する $c = a \oplus b$ を一つ決めると双函手 $\oplus : A \times A \to A$ も一つに決まる．ただし射 $f_1 : a \to a'$ と $f_2 : b \to b'$ について $f_1 \oplus f_2$ は等式

$$p'_j (f_1 \oplus f_2) = f_j p_j, \qquad j = 1, 2 \tag{3}$$

によって定義されるか（つまり，積 $\times = \oplus$ として定義されるか），または等式

$$(f_1 \oplus f_2)i_k = i'_k f_k, \qquad k = 1, 2 \tag{4}$$

によって，つまり余積 $\oplus = \amalg$ として定義される．ただし i'_1, i'_2 は第二の余積の入射である．実際，最初の等式の組 (3) は $f_1 \oplus f_2$ を f_1 と f_2 をコンポーネントとする射として一意的に定める．なぜなら，(3) と双積の定義式および $p_1 i_2 = p_2 i_1 = 0$ によって二番目の等式の組の

$$(f_1 \oplus f_2)i_k = (i'_1 p'_1 + i'_2 p'_2)(f_1 \oplus f_2)i_k = i'_k f_k$$

が成り立つからである．また逆のことも双対的に言える．

この結果は次のように定式化することもできる．つまり，(3) によって定義される射関数を伴う積函手 $a \times b$ と，(4) によって定義される射関数を伴う余積函手 $a \amalg b$ との同一化は自然同型である．

与えられた $a_1, \ldots, a_n \in A$ について，作業を繰り返し行うことによって，図式

$$a_j \xrightarrow{\ i_j\ } \bigoplus_j a_j \xrightarrow{\ p_k\ } a_k, \qquad j, k = 1, \ldots, n$$

および等式

$$i_1 p_1 + \cdots + i_n p_n = 1, \qquad p_k i_j = \delta_{kj} = 0 \quad k \neq j, \tag{5}$$
$$= 1 \quad k = j$$

により（A における同型を除いて）特徴付けられる双積 $\bigoplus_j a_j$ が得られる．さらに，与えられた $c_1, \ldots, c_m \in A$ について，アーベル群どうしのある同型

$$A(\bigoplus_k c_k, \bigoplus_j a_j) \cong \sum_{j,k} A(c_k, a_j)$$

が存在する．ただし $\sum$ はアーベル群の双積を繰り返し取ったものを意味する．このことから各射 $f : \oplus_k c_k \to \oplus_j a_j$ がそのコンポーネント $f_{jk} = p_j\ f\ i_k : c_k \to a_j$ からなる $n \times m$ 行列によって決められることがわかる．よって射の合成はコンポーネントの行列の通常の行列積によって与えられる．言い換えれば，等式 (5) は行列のよく知られた計算を包含している（第 III 章第 5 節を参照）．

加法圏 (additive category) はヌル対象 0 および各対象の組に対する双積を持つ Ab-圏と定義される．

命題 3 加法圏 A における平行な射 $f, f' : a \to b$ について，

$$f + f' = \check{\delta}^b (f \oplus f') \delta_a : a \to b \tag{6}$$

が成り立つ．ただし $\delta_a : a \to a \times a$ は対角マップであり，$\check{\delta}^b : b \oplus b = b \amalg b \to b$ は余対角マップである．

ここで対角マップは $p_1 \delta_a = 1_a = p_2 \delta_a$ によって定義され，余対角マップは $\check{\delta}^b i_1 = 1_b = \check{\delta}^b i_2$ によって定義される．命題の証明は直接計算して得られる．つまり，

$$\begin{aligned}
\check{\delta}^b (f \oplus f') \delta_a &= \check{\delta}^b (f \oplus f')(i_1 p_1 + i_2 p_2) \delta_a \\
&= \check{\delta}^b (f \oplus f') i_1 + \check{\delta}^b (f \oplus f') i_2 \\
&= \check{\delta}^b i_1 f + \check{\delta}^b i_2 f' = f + f'.
\end{aligned}$$

この命題は A の加法的な構造が双積から導かれることを示唆している（演習問題 4 を参照）．

A と B が Ab-圏のとき，**加法的函手** (additive functor) $T : A \to B$ とは A から B への函手で A 上の射による任意の平行対 $f, f' : b \to c$ について

$$T(f + f') = Tf + Tf' \tag{7}$$

を満たすものを言う．定義から $T0 = 0$ である．A の加法的な構造は A の双積の構造によって記述できるので，この条件 (7) は以下の命題で表現し直すことができる．

命題 4 A と B が Ab-圏で A がすべての二項双積を持つとき，函手 $f : A \to B$ が加法的であることと，T が A 上の各二項双積図式を B 上の双積図式に写すことは同値である．

証明　入射 i_j と射影 p_j によって双積を描写している等式 $p_1 i_1 = 1, p_2 i_2 = 1$ および $i_1 p_1 + i_2 p_2 = 1$ は，どれも加法的函手によって保存されている．よっ

て各加法的函手は双積を保存する．

逆に，T がすべての二項双積を保存すると仮定する．このとき射の平行対 $f_1, f_2 : a \to a'$ は $T(f_1 \oplus f_2) = Tf_1 \oplus Tf_2$ を満たす．よって，和に対する直和による式 (6) および等式 $T(\delta_a) = \delta_{Ta}$，$T(\check{\delta}^a) = \check{\delta}^{Ta}$ により $T(f_1 + f_2) = Tf_1 + Tf_2$ となる．ここで $T(\delta_a) = \delta_{Ta}$ と $T(\check{\delta}^a) = \check{\delta}^{Ta}$ は対角函手 δ と余対角函手 $\check{\delta}$ に対する積と余積による定義から直ちに言える．□

この命題は次のように改良もできる．T が加法的であることと，T が A 上の各二項双積図式を B 上の積図式に写すことは同値である，また，T が A 上の各二項双積を B 上の余積に写すこととも同値である．

Ab-圏 A に関する多くのよく知られた函手は加法的である．たとえば，A が小さな hom 集合を持つとき，各 hom 函手

$$A(a, -) : A \to \mathbf{Ab}, \qquad A(-, a) : A^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$$

は加法的である．A と B が Ab-圏のときは，$A \times B$ も Ab-圏となり，この積の射影 $A \times B \to A$, $A \times B \to B$ は加法的函手となる．アーベル群のテンソル積は函手 $\mathbf{Ab} \times \mathbf{Ab} \to \mathbf{Ab}$ であり，それぞれの引数について加法的であり，ねじれ積 (torsion product) も同じことが言える．

演習問題

1. 任意の加法圏 A において，(第 III 章第 5 節で定義された) カノニカルマップ

$$\kappa : a_1 \amalg \cdots \amalg a_n \to a_1 \times \cdots \times a_n$$

は同型であることを示せ．(これは本質的には定理 2 の書き換えである．)

2. 上記のマップに対応する無限余積を適当な無限積に写すカノニカルマップ κ を定義し，そのようなマップはすべての加法圏において必ずしも同型でないことを反例によって証明せよ．

3. 加法圏において，双積は（自然同型を除いて）結合律と交換律を満たすことを示せ．

4. （加法圏を得るための，射の加法に対する他の定義）．

(a) A をヌル対象，有限積および有限余積を持つ圏とし，その圏において余積から積へのカノニカルな射 $a_1 \amalg a_2 \to a_1 \times a_2$ （第 III 章第 5 節）が常に同型であるとする．$f, f' : a \to b$ について $f + f' = \check{\delta}^b (f \times f') \delta_a$ を定義する．この

加法によって各集合 $A(a,b)$ は可換モノイドをなし，合成はこの加法に関して分配律を満たすことを示せ．

(b) さらに，もし各 $a \in A$ について射 $v_a : a \to a$ が存在して $v_a + 1_a = 0 : a \to a$ を満たすとき，各 $A(a,b)$ が上記の加法に関して群をなし，よって，この加法は A に加法圏の構造を与える（Mac Lane [1950]）ことを証明せよ．

5. （与えられた C 上の自由 Ab-圏）．圏 C が与えられたとして，C から Ab-圏への普遍射をなす Ab-圏 A および函手 $C \to A$ を構成せよ．（ヒント：A の対象は C のと同じであり，$A(b,c) = \mathbf{Z}(C(b,c))$ は集合 $C(b,c)$ 上の自由アーベル群である.）

6. （自由加法圏）．

(a) Ab-圏 A が与えられたとして，A から加法圏への普遍射をなす加法圏 $\mathrm{Add}(A)$ および加法的函手 $A \to \mathrm{Add}(A)$ を構成せよ．（ヒント：$\mathrm{Add}(A)$ の対象は A の対象による n 個の組（ただし $n = 0, 1, \ldots$）であり，射は A の射による行列である.）

(b) A を可換環 K とし，これを一つの対象だけからなる Ab-圏と見なす．このとき，$\mathrm{Add}(K)$ が第 I 章第 2 節で述べられた圏 $\mathbf{Matr}_K$ となることを証明せよ．（ヒント：$\mathbf{Matr}_K$ が求める普遍性を持つことを示せ.）

3 アーベル圏

定義 2 アーベル圏 (abelian category) A とは以下の条件を満たす Ab-圏のことである．

(i) A はヌル対象を持つ．
(ii) A は二項双積を持つ．
(iii) A 上のすべての射は核と余核を持つ．
(iv) すべてのモニック射は核となり，すべてのエピ射は余核となる．

最初の二つの条件は A が第 2 節で述べた加法圏であることを保証している．第 2 節の命題 1 によって，(i) でヌル対象を要請する代わりに始対象または終対象を要請すれば十分である．また，すべての双積 $a \oplus b$ の代わりに，すべての積 $a \times b$ あるいはすべての二項余積を要請すれば十分である．

(i) と (ii) により，条件 (iii) における核の存在から A がすべての有限極限を持つことが言える．実際，$f, g : a \to b$ のイコライザは $f - g$ の核として

構成できるし，(i) と (ii) から有限積が得られ，有限積とイコライザからすべての有限極限が得られる．双対的に，余核の存在からすべての有限余極限の存在が言える．

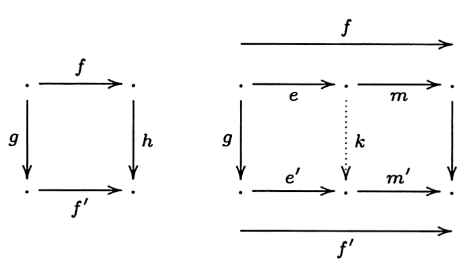
条件 (iv) は強力である．たとえば，この条件からモニックかつエピである任意の射 f は同型射となる．実際，$f: a \to b$ がモニックであることから，ある g について $f = \ker g$ となり $gf = 0 = 0f$ となる．ところが f はエピなので，キャンセルして $g = 0: b \to c$ が得られ，$g = 0$ の核は b の恒等射と等しいので，f は同型射となる．

圏 R-**Mod**, **Mod**-R, **Ab**（および他の多く）はすべてアーベル圏であり，通常の核と余核を持つ．A がアーベル圏ならば．任意の J について函手圏 A^J もアーベル圏となる．特に，$S, T: J \to A$ が任意の二つの函手のとき，すべての自然変換 $\alpha, \beta: S \dot{\to} T$ からなる集合 $\mathrm{Nat}(S,T) = A^J(S,T)$ はアーベル群であり，項ごとに定義された加法 —— 各 $j \in J$ について $(\alpha+\beta)_j = \alpha_j + \beta_j : S_j \to T_j$ —— を伴う．J のすべての対象を A のヌル対象に写す函手 $N: J \to A$ は A^J のヌル函手となり，二つの函手の双積 $S \oplus T$ は $(S \oplus T)a = Sa \oplus Ta$ として項ごとに定義され，そして，自然変換 $\alpha: S \dot{\to} T$ の核 K は，各 j について $Kj \to Sj$ が α_j の核となるように，項ごとに定義される．すべての公理が成り立ち，よって A^J はアーベル圏となる．

命題 1　アーベル圏 A において，すべての射 f は適当なモニック射 m とエピ射 e によって，$f = me$ と分解することができる．さらに，

$$m = \ker(\mathrm{coker}\, f)\ , \qquad e = \mathrm{coker}(\ker f) \tag{1}$$

が成り立つ．他の任意のモニック射 m' およびエピ射 e' による分解 $f' = m'e'$ と，下記の左側にある可換四角図式



(2)

が与えられたとき，一意的な k が存在して $e'g = ke$ かつ $m'k = hm$ となる（つまり，上記の右側の四角図式が可換になる）．

証明 f のそのような分解を構成するために，$m = \ker(\mathrm{coker}\, f)$ を取る．$(\mathrm{coker}\, f) \circ f = 0$ より，一意的な e について f は $f = me$ と分解され，さらに第1節の補題1より，e はエピである．このとき m はモニックなので，任意の合成可能な t について，$ft = 0$ と $et = 0$ は同値である．これより $\ker f = \ker e$ が成り立つ．ところが e はエピなので，$e = \mathrm{coker}(\ker e) = \mathrm{coker}(\ker f)$ となる．よって (1) が示せた．

ここで f と f' を射の圏 $A^{\mathbf{2}}$ における対象と見なす．このときモルフィズム $\langle g, h\rangle : f \to f'$ は上記の (2) における可換四角図式に他ならない．分解 $f = me$ および $f' = m'e'$ を考え，$u = \ker f = \ker e$ とおく．このとき $0 = hfu = m'e'gu$ が成り立ち，$e'gu = 0$ となり，$e'g$ はある一意的な k に対し $e'g = ke$ を満たす，つまり $e = \mathrm{coker}\, u$ によって分解される．よって $m'ke = m'e'g = hme$ も成り立ち，$m'k = hm$ となり (2) の長方形の中の両方の四角図式が可換になる． □

これで証明は完了した．命題の後半は，任意のモルフィズム $\langle g, h\rangle : f \to f'$ が f の分解を f' の分解へと写さなければならず，したがって分解が函手的であることを示している．特に，恒等モルフィズム $\langle 1, 1\rangle : f \to f$ について，この命題は任意の二つのモニック-エピ分解 (monic-epi factorization) $f = me$ および $f = m'e'$ が同型（上記の同型射 k）であることを示している．

この分解から，$f = me : a \to b$ の（通常の）像と余像を

$$m = \mathrm{im}\, f\,, \qquad e = \mathrm{coim}\, f \tag{3}$$

によって同型を除いて一意的に定義する．したがって f の**像** (image) m は f のコドメイン b の部分対象であり，f の**余像** (coimage) e は f のドメインの商対象である．より一般的には，モニック射 m_1，同型射 t およびエピ射 e_1 によって $f = m_1te_1$ となるときは，$m_1 \equiv \mathrm{im}\, f$ かつ $e_1 \equiv \mathrm{coim}\, f$ となり，t は（通常の）余像から像への同型射となる．これは $\mathbf{Ab}$ のようなよく知られた具体的な圏において成り立つ性質である．もし $f : B \to C$ が $\mathbf{Ab}$ 上のモルフィズムで，その核が B の部分群 K で像が C の部分群 S ならば，f は三

項の合成

$$B \xrightarrow{e_1} B/K \xrightarrow{u} S \xrightarrow{m_1} C$$

として分解される．ここで，e_1 は通常の商群上の射影を，m_1 は包含を，u は余像 B/K から像 S への自明な同型を表す．各商対象 B/K が（余集合による）カノニカルな表現を持つために，この三項の分解が生じる．

任意のアーベル圏における完全系列は従来通り成り立つ．

定義 3 合成可能な射の対

$$\cdot \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} \cdot \tag{4}$$

が b において**完全** (exact) であるとは，$\mathrm{im}\, f \equiv \ker g$（$b$ の部分対象としての同値性）が成り立つか —— あるいは，同じことだが，$\mathrm{coker} f \equiv \mathrm{coim}\, g$ が成り立つことである．

$\mathrm{im}\, f \leqq \ker g$ と $gf = 0$ は同値であり，一方で，$\mathrm{im}\, f \geqq \ker g$ のとき，かつそのときに限り $gk = 0$ を満たすすべての k は $k = mk'$ と分解されることに注意されたい．ここで m はモニック-エピ分解 $f = me$ の最初の要素である．完全性に対するこの二通りの定義は（たとえば **Ab** における）次のような従来の条件に他ならない．$\langle f, g \rangle$ が完全であることの意味は，合成 gf がゼロであり，g によって零元に行くすべての要素は f の像に含まれるというものである．

定義 4 （0 をヌル対象として）図式

$$0 \longrightarrow a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \longrightarrow 0 \tag{5}$$

が**短完全系列** (short exact sequence) であるとは，その図式が a, b および c において完全であることを言う．

$0 \to a$ はゼロ射なので，a における完全性は f がモニックであることに他ならず，双対的に，c における完全性は g がエピであることを意味する．結局のところ，(5) が短完全であることは

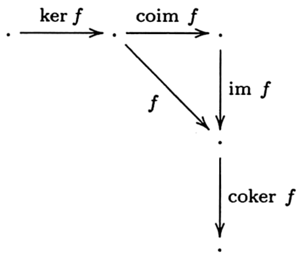
$$f = \ker g\ , \qquad g = \mathrm{coker}\ f \tag{6}$$

と同値である．同様に，$h = \mathrm{coker}\, f$ であることは，列

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{h} c \longrightarrow 0 \tag{7}$$

が b と c において完全ということになる．古典的には，そのような列 (7) は**短右完全系列** (short right exact sequence) と呼ばれていた．同様に，$k = \ker f$ は短左完全系列 (short left exact sequence) によって表現される．

任意の射 f のモニック-エピ分解 $f = me$ は，以下の可換図式の上と横に現れる二つの短完全系列（端のゼロは略記した）を定める．



(8)

アーベル圏 A と B の間の函手 $T : A \to B$ は，すべての有限極限と有限余極限を保存するとき**完全**であると定義される．特に，完全函手は核と余核を保存する．これは

$$\ker(Tf) = T(\ker f), \qquad \mathrm{coker}(Tf) = T(\mathrm{coker}\, f) \tag{9}$$

を意味する．この函手はまた，像と余像を保存し，完全系列を完全系列に写す．積とイコライザによるよく知られた極限の構成とその双対の構成によって，$T : A \to B$ が完全であることと T が加法的で核と余核を保存することは同値になる．

函手 T がすべての有限極限を保存するとき，T は**左完全** (left exact) であると言う．言い換えれば，T が左完全であることは，T が加法的ですべての f について $\ker(Tf) = T(\ker f)$ を満たすことと同値である．このとき，最後の条件は T が短左完全系列を保存することを要求するに等しい．

アーベル圏には，各 hom 集合上に与えられるアーベル群の構造に関与しない，より経済的な書き方がある．明示的に述べると，A を先に述べたのとちょうど同じように公理 (i)，(ii′)，(iii)，(iv) を満たす**任意の**圏とする．ただし (ii) は

(ii′) A は二項積と二項余積を持つ.

に置き換えられている．このとき第 2 節の式 (6) を用いて各 hom 集合 $A(a,b)$ に加法を導入することができる．そして，この加法によって A はアーベル圏になる．Freyd [1964] や Schubert [1970] にある，いくらか凝ったその証明は応用することがあまりないように思われるのでここでは省くことにする．そこでは圏は通常通り各 $A(a,b)$ の中に必要な加法を備える.

演習問題

1. アーベル圏 A, B について，加法函手 $T : A \to B$ が完全であるとき，かつそのときに限り T が A 上のすべての短完全系列を B 上の短完全系列に写すことを示せ.
2. A と B がアーベル圏ならば積圏 $A \times B$ もアーベル圏であることを証明せよ.
3. すべての自由アーベル群からなる圏はアーベル圏ではないことを示せ.
4. すべての有限アーベル群からなる（そのような群どうしのすべてのモルフィズムを射に持つ）圏はアーベル圏であることを示せ.
5. R が左ネーター環ならば，すべての有限生成左 R-加群からなる（そのような加群どうしのすべてのモルフィズムを射に持つ）圏はアーベル圏であることを示せ.
6. アーベル圏における対象 a の部分対象 $u \leqq v$ について，(**Ab** における従来の概念に合うように)「商」対象 v/u を定義せよ．$gf = 0$ のとき，$\ker g/\mathrm{im}\, f$ は双対対象 $\mathrm{coim}\, g/\mathrm{coker}\, f$ と同型であることを証明せよ.

4　図式の補題

アーベル圏 A において，合成可能な射による列

$$\cdots \to c_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} c_n \xrightarrow{\partial_n} c_{n-1} \to \cdots \tag{1}$$

で，すべての n について $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ となるものを**鎖複体**と呼ぶ．この列は必ずしも c_n において完全ではない．実際，完全であることとのずれは n 番目の**ホモロジー対象** (homology object)

$$H_n c = \ker(\partial_n : c_n \to c_{n-1})/\mathrm{im}(\partial_{n+1} : c_{n+1} \to c_n) \tag{2}$$

によって測られる（商については第 3 節の演習問題 6 を参照されたい）．最初

は代数的位相幾何学の中で **Ab** あるいは K-**Mod**（特に K がある素数を法に持つ整数全体の場合）における鎖複体のみが用いられていたが，層理論やホモロジー代数のより一般的な考察によって他の多くのアーベル圏における鎖複体が用いられるようになった．ホモロジーの定義 (2) は任意のアーベル圏において適用される．一方，その性質に対する研究成果は完全系列に対する特定の扱いに依存しており，通常は **Ab** において要素を図式に沿って追跡することによって証明される．ここで我々は任意の（固定された）アーベル圏 A において基本的な図式補題が如何にして成り立つかを示すことになる．

（A 上の）短完全系列間のモルフィズム $\langle m, e\rangle \to \langle m', e'\rangle$ とは，図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \cdot & \xrightarrow{m} & \cdot & \xrightarrow{e} & \cdot & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \\ 0 & \longrightarrow & \cdot & \xrightarrow[m']{} & \cdot & \xrightarrow[e']{} & \cdot & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{3}$$

が可換になるような A 上の射の三つ組 $\langle f, g, h\rangle$ であると定義する．これらのモルフィズムを伴う短完全系列は圏 $\mathbf{Ses}A$ をなす．これが加法的であることは容易に証明できる．最初の基本的補題は以下の通りである．

補題 1（短五項補題 (short five lemma)）．短完全系列による任意の可換図式 (3) において，f と h がモニックならば g もモニックであり，f と h がエピならば g もエピである．

証明 **Ab** において，$\ker g$ の要素 x を任意に取ると，$g(x) = 0$ が成り立ち，よって $he(x) = 0$ かつ $e(x) = 0$ となる．

$$\begin{array}{ccccccc} & & x' & \overset{m}{\longmapsto} & x & \overset{e}{\longmapsto} & e(x) \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ 0 & \mapsto & f(x') & \longmapsto & 0 & \mapsto & 0 = he(x) \end{array}$$

第 1 行の完全性により，$m(x') = x$ を満たす要素 x' が存在せねばならない．第 2 行の完全性により，$f(x') = 0$ すなわち $x' = 0$ が成り立ち，よって $x = 0$ となる．この議論は x についての「図式上の追跡」になっている．

任意のアーベル圏において，要素を考えずに同じ議論ができる．$k = \ker g$ を取る．すると $hek = e'gk = 0$ となる．よって，h がモニックなので，$ek = 0$ となる．よって k は $m = \ker e$ によって $k = mk'$ と分解される．しかしこのとき $0 = gk = gmk' = m'fk'$ となり，m' と f はモニックなので，$k = 0$ となる．$k = \ker g$ なので，以上により g がモニックであることが言える．

g がエピであることの証明は上記の証明の双対である．□

Ab では，モニック射の引き戻しはモニックになり，エピ射の引き戻しはエピになる．このことは任意の圏におけるモニック射の引き戻しについて成り立ち（第 V 章第 3 節の補題を参照），アーベル圏におけるエピ射の引き戻しについては以下のように成り立つ．

命題 2 アーベル圏において引き戻しが（下図右側のように）与えられたとき，

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & a & \overset{k'}{\dashrightarrow} & s & \overset{f'}{\longrightarrow} & d \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle g'} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\
0 & \longrightarrow & a & \overset{k}{\longrightarrow} & b & \overset{f}{\longrightarrow} & c
\end{array}$$

f がエピならば f' もエピである．また，f の核 k は f' の核 k' によって $k = g'k'$ と分解される．

特に，短完全系列 $a \to b \to c$ が与えられたときは，右側終端の対象 c への各射 $g : d \to c$ から引き戻しによって短完全系列 $a \to s \to d$ が得られる．この操作（およびその双対）は $\mathrm{Ext}(c, a)$（a から c への「すべての」短完全系列の集合）をアーベル圏の双函手として記述する上での基礎となる（Mac Lane [1963a]，第 III 章を参照）．

証明　引き戻し s は（任意の引き戻しと同様に）積とイコライザから構成される．つまり，射影 p_1, p_2 を伴う $b \oplus d$ から短左完全系列

$$0 \longrightarrow s \xrightarrow{\ m\ } b \oplus d \xrightarrow{\ fp_1 - gp_2\ } c$$

を作り（つまり m を核とし），さらに $g' = p_1 m$, $f' = p_2 m$ とすればよい．

このとき $fp_1 - gp_2$ はエピである．これを示すために，ある h について

$h(fp_1 - gp_2) = 0$ と仮定する．すると，双積の入射 i_1 を用いれば，

$$0 = h(fp_1 - gp_2)i_1 = hfp_1 i_1 = hf$$

が成り立ち，f はエピであるように与えられているので $h = 0$ となる．

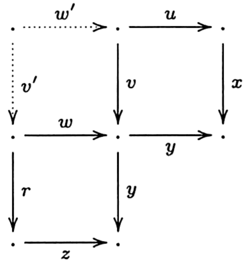
ここである u について $uf' = 0$ と仮定する．$f' = p_2 m$ かつ $up_2 m = 0$ なので，up_2 は $fp_1 - gp_2 = \operatorname{coker} m$ によって $up_2 = u'(fp_1 - gp_2)$ と分解される．しかし $p_2 i_1 = 0$ なので，

$$0 = up_2 i_1 = u'(fp_1 - gp_2)i_1 = u' fp_1 i_1 = u' f$$

となる．f はエピなので $u' = 0$．よって f' もエピとなり，求めることが示せた．

最後に，$k = \ker f$ を考える．射 $k : a \to b$ および $0 : a \to d$ の組について $fk = 0 = g0$ なので，引き戻し s の定義により一意的な射 $k' : a \to s$ が存在して $g'k' = k$ かつ $f'k' = 0$ が成り立つ．このとき k はモニックなので k' もモニックになる．k' が f' の核であることを示すために $f'v = 0$ を満たす任意の射 v を考える．そのとき，$fg'v = gf'v = 0$ となり，したがって $g'v$ は $k = \ker f$ によって分解される．つまり，ある v' について $g'v = kv'$ となる．このとき $g'v = g'(k'v')$ かつ $f'v = 0 = f'(k'v')$ となり，引き戻しの定義に含まれる一意性により，$v = k'v'$ となる．よって $k' = \ker f'$ となり，求めることが示せた． □

この命題によって，(**Ab** の）要素の代わりに（任意のアーベル圏 A の）「メンバ」を用いることにより任意のアーベル圏において図式上の追跡を行うことができる．$a \in A$ をコドメインに持つ射 x を a のメンバ (member) と呼び，$x \in_m a$ で表す．そして a の二つのメンバ x, y について，あるエピ射 u, v が存在して $xu = yv$ を満たすとき，$x \equiv y$ と定義する．この関係は明らかに反射的かつ対称的である．これが推移的であることを示すために，さらにエピ射 w と r について $yw = zr$ となることを仮定し，下記の図式の左上に見られる引き戻しの四角図式を考える．



命題 2 により，v' と w' はエピとなり，それゆえ $x \equiv z$ が言える．このとき a のメンバは a への射からなる関係 $\equiv$ による同値類となる．すべての射 x は分解 $x = me$ を持つので，a のすべてのメンバは a の部分対象（モニック射 m）によって表されるが，我々はこの事実を用いなくてすむだろう．各対象 a はゼロメンバ，すなわちゼロ射 $0 \to a$（の同値類）を持つ．各メンバ $x \in_m a$ は「負値」$-x$ を持つ．

任意の射 $f : a \to b$ について，各メンバ $x \in_m a$ から $fx \in_m b$ が得られ，a において $x \equiv y$ ならば b において $fx \equiv fy$ となり，よって a から b への任意の射は —— あたかもメンバが集合の元であるかのように —— a のメンバを b のメンバに写す．

定理 3（図式追跡のための基本法則）．任意のアーベル圏におけるメンバについて，以下の性質が成り立つ．

(i) $f : a \to b$ がモニックのとき，かつそのときに限り，すべての $x \in_m a$ について，$fx \equiv 0$ ならば $x \equiv 0$ である．

(ii) $f : a \to b$ がモニックのとき，かつそのときに限り，すべての $x, x' \in_m a$ について，$fx \equiv fx'$ ならば $x \equiv x'$ である．

(iii) $g : b \to c$ がエピのとき，かつそのときに限り，各 $z \in_m c$ についてある $y \in_m b$ が存在して $gy \equiv z$ となる．

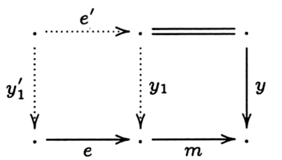
(iv) $h : r \to s$ がゼロ射のとき，かつそのときに限り，すべての $x \in_m r$ について $hx \equiv 0$ である．

(v) 列 $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ が b において完全のとき，かつそのときに限り，$gf = 0$ であり，かつ $gy \equiv 0$ を満たすすべての $y \in_m b$ について，ある $x \in_m a$ が存在して $fx \equiv y$ となる．

(vi)（引き算）．$gx \equiv gy$ を満たす $g : b \to c$ および $x, y \in_m b$ が与えられたとき，あるメンバ $z \in_m b$ が存在して $gz \equiv 0$ となり，さらに，$fx \equiv 0$ を満たす任意の $f : b \to d$ は $fy \equiv fz$ を満たし，$hy \equiv 0$ を満たす任意の $h : b \to a$ は $hx \equiv -hz$ を満たす．

証明　法則 (i) と (ii) はモニック射の定義に他ならない．(iii) において，g がエピだとすると，引き戻しにより（命題 2 を用いて）$gy \equiv z$ を満たす $y \in_m b$ が得られる．逆に，g がエピでないとすると，メンバ $1_c \in_m c$ はどのような $y \in_m b$ に対しても $gy \equiv 1_c$ を満たさない．法則 (iv) は自明である．

法則 (v) に対して，標準的な分解 $f = me$ を考え，まず与えられた列が b において完全，つまり $m = \ker g$ であると仮定する．もし $gy \equiv 0$ ならば，ある y_1 について $y \equiv my_1$ となる．[実際には，$gy \equiv 0$ から $gy = 0$ が言えるので，ある y_1 について $y = my_1$ となる.] そこで以下の図式の左側に引き戻しを作ると，



$ye' = mey'_1 = fy'_1$，さらに e' はエピなので，$y \equiv fy'_1$，つまり求めたいことが示せた．逆に，すべての $y \in_m b$ についてこの性質が成り立つとして，$k = \ker g$ を取る．このとき，$k \in_m b$ かつ（c において）$gk \equiv 0$ となる．それゆえあるメンバ $x \in_m a$ について $fx \equiv k$，つまり，適当なエピ射 u および v によって $ku = mexv$ となる．しかしこの等式からモニック射 k が m によって分解され，したがって $\operatorname{im} f \geqq \ker g$ となることがわかる．これと $gf = 0$ を合わせると，求めたい完全性が得られる．

法則 (vi) は **Ab** における要素の引き算の代わりを意図している．$gx \equiv gy$ ならば，あるエピ射 u, v が存在して $gxu = gyv$ となり，$z = yv - xu \in_m b$ が (vi) を成り立たせることがわかる．　□

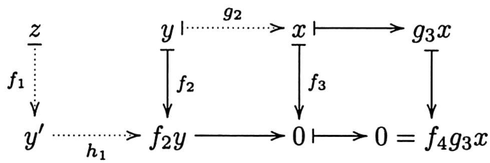
ここでこれらの手法を用いた図式上の追跡の例を挙げる．

補題 4　（五項補題 (five lemma)）．完全系列による可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} a_1 & \xrightarrow{g_1} & a_2 & \xrightarrow{g_2} & a_3 & \xrightarrow{g_3} & a_4 & \xrightarrow{g_4} & a_5 \\ \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \downarrow{\scriptstyle f_4} & & \downarrow{\scriptstyle f_5} \\ b_1 & \xrightarrow[h_1]{} & b_2 & \xrightarrow[h_2]{} & b_3 & \xrightarrow[h_3]{} & b_4 & \xrightarrow[h_4]{} & b_5 \end{array} \tag{4}$$

において，f_1, f_2, f_4, f_5 が同型ならば，f_3 も同型になる．

証明　双対により，f_3 がモニックであることを示せば十分である．**Ab** においてならば，要素 $x \in \ker f_3$ を「追跡」するところだろう．その代わりに $f_3x \equiv 0$ を満たす任意のメンバ $x \in_m a_3$ を考える．このことから $f_4g_3x \equiv 0$ が成り立ち，f_4 がモニックなので，$g_3x \equiv 0$ となる．



a_3 における完全性および定理の法則 (v) により，ある $y \in_m a_2$ が存在して $g_2y \equiv x$ となる．よって $0 \equiv f_3x \equiv f_3g_2y \equiv h_2f_2y$ となり，b_2 における完全性から，ある $y' \in_m b_1$ が存在して $h_1y' \equiv f_2y$ となる．f_1 はエピなので，ある $z \in_m a_1$ が存在して $h_1f_1z \equiv f_2y$，言い換えれば $f_2g_1z \equiv f_2y$ となる．しかし f_2 はモニックなので，法則 (ii) により $g_1z \equiv y$ となり，$x \equiv g_2y \equiv g_2g_1z \equiv 0$ となる．$f_3x \equiv 0$ となる任意の x はそれ自体が 0 と同値なので，f_3 はモニックである．これで求めることが示せた．□

もう一つの例を示すために，(3) にあるような短完全系列の任意のモルフィズム $\langle f, g, h\rangle$ を考える．ここで，f, g, h の核と余核を加えて次のページの図式 (5) を作る．ただし Kef は $\ker f$ のドメイン，Cof は coker f のコドメインを表し，その他も同様である．この図式において各縦列は（一番上と一番下に 0 を加えると）構成の仕方により完全系列であり，真ん中の二つの行も完全系列として与えられている．核と余核の定義により，一番上の行に一意的な射 m_0, e_0 を加え，一番下の行に m_1, e_1 を加えて，加えられた各四角図式が可換になるようにすることができる．(定理 3 の手法により）簡単な図式上の追跡から第 1 行が Kef と Keg において完全であることがわかり，双

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & Kef & \overset{m_0}{\dashrightarrow} & Keg & \overset{e_0}{\dashrightarrow} & Keh & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} & & \downarrow{\scriptstyle k} & & \\
0 & \longrightarrow & a & \xrightarrow{m} & b & \xrightarrow{e} & c & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & a' & \xrightarrow{m'} & b' & \xrightarrow{e'} & c' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & Cof & \overset{m_1}{\dashrightarrow} & Cog & \overset{e_1}{\dashrightarrow} & Coh & \longrightarrow & 0
\end{array}
\qquad (5)
$$

対的に，最後の行が Cog と Coh において完全であることもわかる．しかしながら，e_0 がエピになるとは限らないので第 1 列は必ずしも短完全系列ではないし，また，m_1 がモニックでないちょうどそのときも同様のことが起こる．この現象に対する簡単な例として（**Ab** において）

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbf{Z} & \xrightarrow{1} & \mathbf{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbf{Z} & \xrightarrow{1} & \mathbf{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

が考えられる（ただし $g \neq 0$ とする）．

この完全性の欠落は以下の特筆すべき補題によって修復できる．そこでは，**連結準同型** (connecting homomorphism) と呼ばれる δ が付け加えられる ―― それは本質的には，相対ホモロジー（部分複体を法とする複体）のために，また，ホモロジー代数における導来函手間の連結マップ (connecting map) のために用いられる連結準同型である．

補題 5 （核-余核列 = ヘビの補題 (snake lemma)）．(3) にあるような短完全系列のモルフィズム $\langle f, g, h\rangle$ が与えられたとき，以下の列が完全になるような射 $\delta : Keh \to Cof$ が存在する．

$$
0 \to Kef \xrightarrow{m_0} Keg \xrightarrow{e_0} Keh \xrightarrow{\delta} Cof \xrightarrow{m_1} Cog \xrightarrow{e_1} Coh \to 0 \quad (6)
$$

証明 短完全系列のマップをもとにして，まず別の図式を以下に構成する．

$$
\begin{array}{ccccc}
a & \overset{s}{\dashrightarrow} & d & \overset{u}{\dashrightarrow} & c_0 \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle k'} & & \downarrow{\scriptstyle k} \\
a & \xrightarrow{m} & b & \xrightarrow{e} & c \\
\downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\
a' & \xrightarrow{m'} & b' & \xrightarrow{e'} & c' \\
\downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p'} & & \| \\
a_1 & \underset{u'}{\dashrightarrow} & d' & \underset{s'}{\dashrightarrow} & c'
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccc}
 & & & & x \in_m C_0 \\
 & & & & \downarrow \\
 & & y & \longmapsto & kx \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
z & \longmapsto & gy & \longmapsto & 0 \\
\downarrow & & & & \\
z_1 & & & &
\end{array}
\qquad (7)
$$

上記の左において，$c_0 = Keh$ で，d は e と $k = \ker h$ の引き戻しであり，したがって命題 2 にあるように，u はエピで s を核として持つ．双対的に，d' は $p = \operatorname{coker} f$ と m' の押し出しで，余核 s' も同様に取れる．ちょうど真ん中の列である合成射 $\delta_0 = p'gk' : d \to d'$ は，$s'\delta_0 = hku = 0$ かつ $\delta_0 s = u'pf = 0$ を満たす．$u' = \ker s'$ かつ $u = \operatorname{coker} s$ であるため，δ_0 は一意的に

$$\delta_0 = u'\delta u : d \xrightarrow{u} c_0 \xrightarrow{\delta} a_1 \xrightarrow{u'} d'$$

と分解される．この真ん中の要素が求めたい「連結」射 $\delta : c_0 \to a_1$ である．

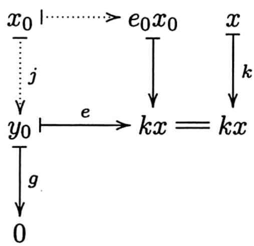
この射 δ によるメンバ $x \in_m c_0$ の成り行きは上記の (7) の右側に示されているジグザグ階段によって表すことができる．実際，e はエピなので，あるメンバ $y \in_m b$ が存在して $ey \equiv kx$ となる．よって $e'gy \equiv hey \equiv hkx \equiv 0$ となり，完全性からあるメンバ $z \in_m a'$ が存在して $m'z \equiv gy$ が成り立つ．このとき δx はメンバ $z_1 = pz \in_m a_1$ になることがわかる．何となれば，d は引き戻しなので，ある $x_0 \in_m d$ について $ux_0 \equiv x$ かつ $k'x_0 \equiv y$ である．よって

$$u'\delta x \equiv u'\delta u x_0 = \delta_0 x_0 \equiv p'gy \equiv u'z_1$$

であり，u' はモニックなので $\delta x \equiv z_1$ となる．またこのことはメンバ z_1（の同値類）がジグザグ図 (7) の構成の際の値の選び方に依存しないことも示している．このジグザグ図はアーベル群の要素における連結モルフィズム δ の振る舞いに対して普通に与えられる記述そのものである．

ここで，このジグザグ図を使って，核-余核列 (6) の完全性，たとえば Keh に

おける完全性を示そう．まず，$\delta e_0 = 0$ を示すには，任意のメンバ $w \in_m b_0 = Keg$ について $\delta e_0 w = 0$ を示せば十分である．ところでメンバ $e_0 w = x \in_m c_0$ は $kx = ke_0 w = ejw$ を満たす．ただし (5) にあるように $j = \ker g$ である．よってジグザグ図 (7) において $y = jw$ とすることができる．このとき $gy = gjw \equiv 0$ となり，これから $\delta e_0 = 0$ が示せる．一方で，$\delta x \equiv 0$ を満たす任意の $x \in_m c_0$ を考える．このことからジグザグ図において作られた z_1 は $z_1 \equiv 0$ を満たすので，完全性により，あるメンバ $z_2 \in_m a$ について $fz_2 \equiv z$ すなわち $gmz_2 \equiv gy$ となる．ここで「差分を取った」メンバ $y_0 = y - mz_2 \in_m b$ を取る．先の法則 (vi) により，この差分メンバは $ey_0 \equiv ey \equiv kx$ および $gy_0 \equiv 0$ を満たす．しかるに $j : b_0 \to b$ は $\ker g$ なので，ある $x_0 \in_m b_0$ が存在して $jx_0 \equiv y_0$ となる．



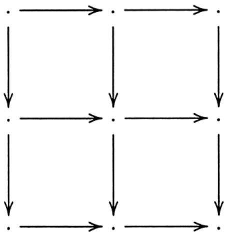
このとき $ke_0x_0 \equiv ey_0 \equiv kx$ となり，k はモニックなので，$e_0x_0 \equiv x$ が成り立つ．よって，$\delta x \equiv 0$ を満たす各 x は $x \equiv e_0x_0$ となる，つまり e_0 の像に含まれることが示せた．このことから完全性が言える．実際のところ，この証明は実際のアーベル群の普通の要素を用いた従来の完全性の証明と全く同様である．□

演習問題

1. 五項補題において，f_3 がモニックとなるための最小限の仮定（f_1, f_2 および f_4 のみに対するもの）を求めよ．
2. 五項補題において,（余メンバではなく）メンバを用いて f_3 がエピとなることを証明せよ.（ヒント：この証明には定理 3 の法則 (vi) が必要である.）
3. 核-余核列の完全性の証明を完成させよ．
4. 連結モルフィズム δ は自然であること，つまり，短完全系列どうしのモルフィズ

ム (3) を対象に持つ適当な圏の上で定義された二つの適当な函手間の自然変換となることを示せ.

5. 3×3 図式とは以下の形



をした（ゼロによって囲まれる）図式のことである.

(a) 次の 3×3 補題 (3×3 lemma) の直接の証明を求めよ．もし 3×3 図式が可換であり，すべての三つの列と最後の二つの行が短完全系列ならば，最初の行も短完全系列になる.

(b) この補題は核-余核列からも証明できることを示せ.

(c) 次の中央 3×3 補題 (middle 3×3 lemma) を証明せよ．もし 3×3 図式が可換であり，すべての三つの列と最初と最後の行が短完全系列ならば，真ん中の行も短完全系列になる.

6. 二つの射 $f : a \to b$ および $g : b \to c$ について，完全系列

$$0 \to Kef \to Kegf \to Keg \to Cof \to Cogf \to Cog \to 0$$

を求めよ.

7. 圏 $\mathbf{Ses}(A)$ は一般的にはアーベル圏ではないことを明示的に示せ.

注釈

圏の発見からすぐ後に，Eilenberg-Steenrod [1952] は，位相空間のホモロジーとコホモロジーを公理論的に記述するために如何にして圏と函手の言葉が用いられるかを示した．やがてこのことは，そのようなホモロジー論の有用性が保たれるような圏を記述するという課題を提起するに至った．アイレンバーグとの議論の後，この問題は Mac Lane [1948, 1950] によってなされた．彼の「アーベル双圏 (abelian bicategory)」という概念はぎこちなく，この課題は初めは活気がなかったが，しばらくして，Buchsbaum の公理論的な研究 [1955] や，Grothendieck [1957] による，位相空間上の（アーベル群による）層の圏はアーベル圏ではあるが加群の圏ではないという発見や，これらの圏におけるホモロジー代数は層コホモロジーを完全に扱うためには不可欠であるという発見がなされた（Godement [1958] も参照されたい）．こ

の刺激によって，アーベル圏は従来の数学体系に組み込まれていった．

この章はアーベル圏の基礎の理論 —— すべての通常の図式補題の公理から直接得られる実証 —— に触れたに過ぎない．我々の「メンバの追跡」という手法は Mac Lane [1963a，第 XII 章] によって与えられた手法を適合させたものである．ここで，重要な部分はヘビの補題であり，その補題は射を構成しているのだ．アーベル圏におけるこの補題の初期の証明は不透明なものであったので，現在のものが（個人的な議論を通じて）M.André によってなされた．これらの図式補題については，適当な埋め込み定理を用いることにより，R-加群の場合での証明からアーベル圏での証明を得ることもできる (Lubkin-Haron-Freyd-Mitchell)．これらの美しい定理は，任意の小さなアーベル圏 A に対して，忠実な完全函手 $A \to \mathbf{Ab}$ および適当な環 R に対する充満かつ忠実な完全函手 $A \to R\text{-}\mathbf{Mod}$ を構成する．この証明に関しては，Mitchell [1965]，Freyd [1964] または Pareigis [1970] を参照されたい．

これらの出典はまたアーベル圏に対するさらに洗練された展開を見せてくれるだろう．たとえば，クルル–レマク–シュミットの定理 (Krull-Remak-Schmidt theorem) や，森田の双対性 (Morita duality)，適当なアーベル圏における「入射包絡 (injective envelope)」の構成，グロタンディク圏の構造，そして局所ネーター圏 (Gabriel [1962]) などが挙げられる．

第IX章　特別な極限

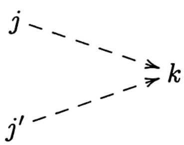
この章では二種類の役に立つ極限（および余極限）を扱う．一つはフィルター極限であり，これは有向な前順序集合上の（より一般的には，あるフィルター圏上の）極限である．もう一つは「エンド」であり，これはある双函手から得られる極限であって積分のように振る舞う．

1　フィルター極限

前順序 P が**有向である** (directed) とは，任意の二つの要素 $p, q \in P$ が P における上界，つまり，$p \leqq r$ かつ $q \leqq r$ を満たす r を持つことを言う（r が一意的であることまでは要求していない）．このことから P の要素からなる任意の有限集合は P における上界を持つことが言える．有向な前順序集合は「有向集合」あるいは「フィルター集合 (filtered set)」とも呼ばれる．

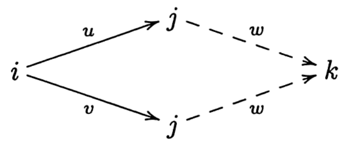
この（改名された）概念は圏へと一般化される．圏 J が**フィルターである** (filtered) とは，J が空でなく次の二つの条件が成り立つことである．

(a) 任意の二つの対象 j, $j' \in J$ について，ある $k \in J$ および射 $j \to k$, $j' \to k$ が存在する．



(b) J 上の任意の二つの平行な射 $u, v : i \to j$ について，ある $k \in J$ お

よび射 $w : j \to k$ が存在して，次の可換なダイアモンド図式が示すように，$wu = wv$ が成り立つ.



条件 (a) は離散な図式 $\{j, j'\}$ が k を頂点とする錐の底であることを示し，条件 (b) は $i \rightrightarrows j$ も錐の底であることを示している．このことからフィルター圏 J における任意の有限図式は，少なくとも一つの，ある頂点 $k \in J$ を持つ錐の底であることが言える.

「余 (co)」の用法には色々あることに注意されたい．何人かの著者（たとえば Mac Lane-Moerdijk [1992]）は，このようなフィルター圏 J を「余フィルター圏」と呼ぶ.

フィルター余極限 (filtered colimit) はフィルター圏 J 上で定義される函手 $F : J \to C$ の余極限として定義される.

古典的には，余極限は有向な前順序の上でのみ（ときには有向な順序の上でのみ）定義されていた．これは余極限の概念に対する不必要な概念上の制限であることが示されている．関連性が残っているものは，フィルター余極限の交換公式（第 2 節），および，有限余積，コイコライザ，有向前順序上の余極限からすべての余極限が得られる可能性である.（無限）余積とコイコライザからすべての余極限が得られる（第 V 章第 2 節定理 1 の双対）ことは既にわかっているので，ここでは以下の結果のみ必要である.

定理 1　有限余積とすべての（小さな）有向前順序上の余極限を持つ圏 C はすべての（小さな）余積を持つ.

証明　J をある集合（= ある離散圏）とし，函手 $F : J \to C$ に対する余極限を作りたい．J^+ をすべての有限部分集合 $S \subset J$ を対象に持ち，包含関係によって順序付けされた前順序とする．このとき明らかに J^+ はフィルターである．F^+ は各有限部分集合 S に，すべての $s \in S$ に対する余積 $\amalg F s$ を割り当てるとする．もし $S \subset T$ が J^+ の射 $u : S \to T$ ならば，$F^+ u$ を，すべ

ての $s \in S$ について図式

$$\begin{array}{ccc} F^+S = \amalg Fs & \cdots\cdots\to & \amalg Ft = F^+T \\ \uparrow{\scriptstyle i_s} & & \uparrow{\scriptstyle i'_s} \\ Fs & = & Fs \end{array}$$

が可換になるような一意的な（点線の）射となるように取る．ここで i と i' は余積の入射である．これから F^+ は結局のところ函手 $J^+ \to C$ となり，J の各 j を一点集合 $\{j\}$ と同一視することにより J を J^+ の一部とすれば，F^+ は J 上では与えられた函手 F と一致する．

ここで，他のある函手 $G : J^+ \to C$ への任意の自然変換 $\theta : F^+ \dot{\to} G$ を考える．各 $s \in S$ について図式

$$\begin{array}{ccc} F^+S = \amalg Fs & \overset{\theta_S}{\cdots\cdots\to} & GS \\ \uparrow{\scriptstyle i_s} & & \uparrow{\scriptstyle G(\{s\}\subset S)} \\ Fs & \underset{\theta_s}{\cdots\cdots\to} & G\{s\} \end{array}$$

は可換である．余積の定義により，これは θ が Fs 上での θ の値 θ_s によって完全に決まることを意味する．特に，F 上の錐 $v : F \dot{\to} c$ をなす J での値によって，F^+ 上の各錐 $v^+ : F^+ \dot{\to} c$ は完全に決まる．しかも，v^+ が極限錐であることと v がそうであることは互いに従う．よって F^+ の余極限から F の余極限が得られ，これは求める余積 $\amalg F_j$ である．F^+ の余極限の存在は J^+ が有向前順序であることから言える．□

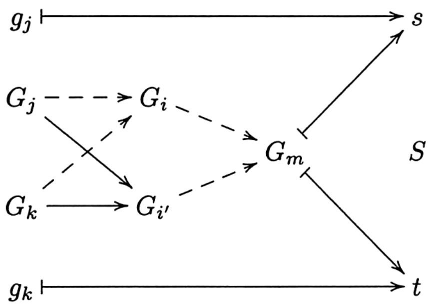
典型的な応用例として，**Grp** における余極限を構成する．

命題 2 忘却函手 **Grp** $\to$ **Set** はフィルター余極限を創出する．

証明　フィルター圏 J および函手 $G : J \to$ **Grp** が与えられているとする．この函手は射 $j \to k$ に群の準同型 $G_j \to G_k$ を割り当てる．ここでは G_j は群とその基底集合の両方を表すとする．さらに，合成函手 $J \to$ **Grp** $\to$ **Set** に対する極限錐 μ が与えられたとする．この錐は集合 S を頂点に持ち，各 $j \in J$ に関数 $\mu_j : G_j \to S$ を割り当てる．ここでまず，すべての関数 μ_j が

群の準同型になるような集合 S 上のある群構造が一意的に存在することを示す．まず，各 $s \in S$ について少なくとも一つの添字 j が存在してある群の要素 g_j が $\mu_j g_j = s$ を満たすことに注意されたい．もしそうでなければ，S から s を除くことによって，より小さな集合 S' を頂点に持つ錐が得られる．それは S の普遍性に明らかに矛盾する（μ との合成が等しい二つの関数 $S \rightrightarrows S$ が存在してしまう）．

ここで任意の二つの要素 $s, t \in S$ の積[1]を定義する．ある $j, k \in J$ について $s = \mu_j g_j$ かつ $t = \mu_k g_k$ と書くことができる．J はフィルターなので，ある頂点 i を持つ j, k 上の錐が J の中に存在する．



この錐の G による像は $G_j \to G_i \leftarrow G_k$ であり，したがって $s, t \in S$ は二つとも群 G_i の要素に由来している．ここで S における s, t の積を G_i におけるもとの要素の積の μ_i による像として定義する．この積は i の取り方に依存しない．なぜなら，異なる i' を選択すると，$G_{i'}$ は**群準同型**からなるある錐 $G_i \to G_m \leftarrow G_{i'}$ の一部だからである．また，これらの三つの要素 r, s, t の積は結合律を満たす．なぜなら，三つの要素の原像すべてを持つ G_i を選ぶことができるし，乗法は G_i において結合律を満たしているからである．各群 G_i は単位元を持ち，各 $G_j \to G_k$ は単位元を単位元に写す．よってこれらの単位元の共通の像は S における乗法に対する単位元である．逆元も同様に作られる．

この時点で，S 上の（一意的な）群の構造が得られ，それに対して $\mu_j : G_j \to S$ が群の準同型となることがわかった．このことから μ は **Grp** にお

[1]［訳注］ここで言う「積」とは群などの代数系における乗法を意味する．

ける G から S への錐であることが言える．この錐が **Grp** において普遍的であることを示す．$\nu : G \dot{\to} T$ が **Grp** における別の錐のとき，それは **Set** における錐でもある．よって一意的な写像 $f : S \to T$ が存在して $f\mu = \nu$ を満たす．このとき写像 f が群の準同型となることが上記と同様にして確かめられる． □

明らかにこの議論は **Grp** に限ったことではない．実際,（第 V 章第 6 節において演算と恒等式によって定義される）各々の固定された型 τ の代数からなる圏 $\mathbf{Alg}_\tau$ に適用できる．この同じ注意は以下の系についても成り立つ．

系 3 **Grp** はすべての（小さな）余極限を持つ．

証明 まず，要素が一つの群は **Grp** の始対象である．次に，任意の二つの群 G および H は余積 $G * H$ を持つ．実際，第三の群 L への任意の準同型 $G \to L$, $H \to L$ の組は G と H の像によって生成される L の部分群を通るように分解される．このような部分群の濃度には限りがあるので，随伴函手定理を適用するための解集合条件が成り立ち，余積 $G * H$ を構成することができる．$G \to G \times X$ との比較により，$G \to G \times H$ がモニックであることもわかる．

以上の二つのことから **Grp** がすべての有限余積を持つことが示せた．命題 2 により，**Grp** はすべてのフィルター余極限を持つ．よって，定理 1 から，**Grp** はすべての小さな余積を持つ．よって，すべての小さな余極限を持つためにはコイコライザのみが必要となり，二つの準同型 $u, v : G \to H$ のコイコライザは，$g \in G$ について $(ug)(vg)^{-1}$ の形を取るすべての要素を含む最小の正規部分群 N による商群上の射影 $H \to H/N$ である． □

この証明は **Grp** における余積に対する明確な形を与えている．二つの群の余積 $G*H$ は通常，**自由積** (free product) と呼ばれる．この要素は文字 $g_i \in G$ および $h_i \in H$ によって綴られる有限語 (finite word) $\langle g_1, h_1, g_2, h_2, \ldots, g_n, h_n \rangle$ である．これらの語は並置によって乗法が与えられ，一方で，簡約の連続（H において $h_i = 1$ ならば，それを除去して $g_i g_{i+1}$ を G 上で計算する，など）によって同値性が与えられる．この定義による乗法の結合律を直接証明する

とゴタゴタしたものになる．この系によって，群 G_i の無限余積 $\amalg_i G_i$ が，すべての有限余積

$$G_{i_1} * G_{i_2} * \cdots * G_{i_k}$$

（包含写像によってこの余積はこれら以上の要素からなる任意の余積の部分群となる）を貼り合わせることによって得られる．それゆえ $\amalg_i G_i$ はこれらすべての有限余積の合併であり，これらの包含写像によって同一視される．

演習問題

1. 随伴函手定理を用いて **Grp** がすべての小さな余極限を持つことを直接証明せよ．
2. 第 V 章第 6 節で述べられた $\mathbf{Alg}_\tau$ がすべての小さな余極限を持つことを証明せよ．特に，始対象を書き表せ（空になるのはどんなときか？）．

2　極限の交換

余完備な圏 X への双函手 $F : P \times J \to X$ を考える．パラメータ p の値 $p \in P$ について，$F(p, -) : J \to X$ の余極限から p の函手 $p \mapsto \mathrm{Colim}_j\, F(p,j)$ が定義され，それによって余極限錐

$$\mu_{p,j} : F(p,j) \to \varinjlim{}_j F(p,j) \tag{1}$$

が p において自然となる（第 V 章第 3 節定理 1）.「カノニカル」マップによって与えられる同型によって

$$\varinjlim{}_p \varinjlim{}_j F(p,j) \cong \varinjlim{}_j \varinjlim{}_p F(p,j) \tag{2}$$

であることが容易に示せるだろう（後の第 8 節）．双対的に，極限も可換になる．しかし極限は必ずしも余極限と可換になるとは限らない．なぜならカノニカルマップ

$$\kappa : \varinjlim{}_j \varprojlim{}_p F(p,j) \to \varprojlim{}_p \varinjlim{}_j F(p,j) \tag{3}$$

は必ずしも同型とは限らないためである．

(3) の四つすべての極限と余極限が存在するや否や，このカノニカルマッ

プも存在し，それは次の図式

$$\begin{array}{ccccc}
F(p,j) & \xleftarrow{\nu_{p,j}} & \underleftarrow{\mathrm{Lim}}_{\,p}F(p,j) & \xrightarrow{\mu_j} & \underrightarrow{\mathrm{Colim}}_{\,j}\underleftarrow{\mathrm{Lim}}_{\,p}F(p,j) \\
{\scriptstyle \mu_{p,j}}\downarrow & & \vdots{\scriptstyle \alpha_j} & & \vdots{\scriptstyle \kappa} \\
\underrightarrow{\mathrm{Colim}}_{\,j}F(p,j) & \xleftarrow{\nu_p} & \underleftarrow{\mathrm{Lim}}_{\,p}\underrightarrow{\mathrm{Colim}}_{\,j}F(p,j) & = & \underleftarrow{\mathrm{Lim}}_{\,p}\underrightarrow{\mathrm{Colim}}_{\,j}F(p,j)
\end{array} \tag{4}$$

のように構成される．ここで ν と各 j に対する $\nu_{-,j}$ は極限錐であり，μ と各 p に対する $\mu_{p,-}$ は余極限錐である．ν は p についての錐であり μ は p について自然であるので，固定された j に対して合成 $\mu_{p,j}\nu_{p,j}$ は p についての錐となる．このとき ν の普遍性により各 j に対して射 α_j が存在し左側の四角図式が可換になる．$\mu_{p,-}$ は j についての錐なので α も j についての錐となる．よって μ の普遍性により，あるマップ κ が存在して右側の四角図式が可換になる．それが求めるカノニカルな射である．

この κ は必ずしも同型とは限らない．たとえば，$P=\{1,2\}$ と $J=\{1,2\}$ が両方とも対象が二つの離散圏の場合を考えよう．そのカノニカルな κ（明確に書き表すと）

$$\kappa : (A_1\times B_1)\amalg(A_2\times B_2)\to(A_1\amalg A_2)\times(B_1\amalg B_2)$$

は，それが存在するときは，二つのコンポーネント α_1 および α_2 によって与えられる．ここで α_1 は

$$\begin{array}{ccccc}
A_1 & \xleftarrow{\quad p\quad} & A_1\times B_1 & \xrightarrow{\quad q\quad} & B_1 \\
{\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_1} & & \downarrow{\scriptstyle i'} \\
A_1\amalg A_2 & \xleftarrow{p} & (A_1\amalg A_2)\times(B_1\amalg B_2) & \xrightarrow{q} & B_1\amalg B_2
\end{array}$$

によって定まる．**Ab** においては κ は明らかに同型である．しかし **Set** においては同型ではない．実際，κ のドメインが二つの集合の直和なのに対し，κ のコドメインは四項の直和

$$(A_1\times B_1)\amalg(A_1\times B_2)\amalg(A_2\times B_1)\amalg(A_2\times B_2)$$

になる．

ここで κ が同型となる十分条件について考えよう．

定理 1 圏 P が有限でかつ J が小さなフィルター圏ならば，任意の双函手 $F: P \times J \to \mathbf{Set}$ について (4) にあるようなカノニカルな射

$$\kappa : \underrightarrow{\mathrm{Colim}}_j \underleftarrow{\mathrm{Lim}}_p F(p,j) \to \underleftarrow{\mathrm{Lim}}_p \underrightarrow{\mathrm{Colim}}_j F(p,j)$$

は同型となる．

これは $\mathbf{Set}$ において有限極限とフィルター余極限が可換であることを意味する．

証明　（第 V 章第 2 節の定理 2 の双対により）余積とコイコライザによって余極限を構成することにより，

$$\underrightarrow{\mathrm{Colim}}_j F(p,j) = \amalg_j F(p,j)/E \tag{5}$$

が成り立つ．ここで $\amalg_j$ は直和であり，E はその和の上で次のように定義される同値関係である．$x \in F(p,j)$ および $x' \in F(p,j')$ について，xEx' のとき，かつそのときに限り，ある射 $u: j \to k$ と $u': j' \to k$ が存在して $F(p,u)x = F(p,u')x'$ が成り立つ．要素 $x \in F(p,j)$ の E-同値類を (x,j) で表すとする．このとき J はフィルターなので,「フィルターであること」の定義における条件 (a) より，このような要素からなる任意の有限の並び (x_1, j_1), $\ldots$, (x_m, j_m) を一つの第二添字 k を持つ並び (x_1, k), $\ldots$, (x_m, k) で表すことができる．また定義の条件 (b) より，この並びの要素間のすべての同値性は適当な一つの射 $w: k \to k'$ を適用した後に得られる．

任意の函手 $G: P \to \mathbf{Set}$ について，$\underleftarrow{\mathrm{Lim}}_p Gp = \mathrm{Cone}(*, G)$，つまり頂点が一点集合 $*$ の G 上の錐 τ の集合である．$Gp = \underrightarrow{\mathrm{Colim}}_j F(p,j)$ かつ P が有限のとき，そのような錐はそれぞれ $\underrightarrow{\mathrm{Colim}}_j F(p,j)$ の有限個の要素から成り立っており，τ が錐であることの条件はこれらの要素間の有限個の等式に関係する．J はフィルターなので，先の考察から各錐 τ はある一つの添字 k' に対する要素 $\tau_p = (y_p, k')$ から作られているとしてよい．ここで $y_p \in F(p,k')$ は既に錐 $y: * \stackrel{\cdot}{\to} F(-,k')$ をなす．この錐 y は $\mathrm{Lim}_p F(p,k')$ の要素であり，その同値類 (y,k') は $\mathrm{Colim}_j \mathrm{Lim}_p$ の要素である．この写像

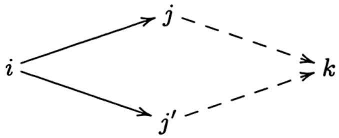
$$\tau \mapsto (y,k') \in \underrightarrow{\mathrm{Colim}}_j \underleftarrow{\mathrm{Lim}}_p F(p,j)$$

は先の選び方に依存せず，求めていた（双方向の）カノニカルな射 κ の逆射

となる．　□

演習問題

1. (3) の κ は $X^{P\times J}$ における射 $\sigma : F \xrightarrow{\cdot} F'$ について自然であることを示せ．
2. (Verdier)．圏 J がフィルター圏の条件 (b) と次の条件 (a′)：ドメインが等しい任意の二つの射 $i \to j$, $i \to j'$ は可換ダイアモンド図式に埋め込むことができる，を満たすとき，J は擬フィルターである (pseudo-filtered) と言う．



   圏 J がフィルターであることと連結かつ擬フィルターであることは互いに従うことを証明せよ．さらに，圏が擬フィルターであることと，その連結コンポーネントがフィルターであることは互いに従うことを証明せよ．
3. **Set** において，余積は引き戻しと可換であることを示せ．
4. 演習問題 2 および 3 を用いて，**Set** において擬フィルター余極限と引き戻しは可換であることを証明せよ．

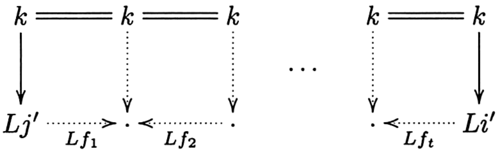
3　共終函手

余極限はしばしば部分圏上で計算することができる．たとえば，$\mathbf{N}$ を自然数の線形順序集合とすると，函手 $F : \mathbf{N} \to \mathbf{Cat}$ の余極限は明らかに F に対する $\mathbf{N}$ の任意の無限部分集合 S （つまり，$\mathbf{N}$ の各対象を「超える」対象を一つ以上含むような任意の部分圏）への制限の余極限に等しい．古典的な術語で言えば，そのような部分集合 S は $\mathbf{N}$ に対して「共終 (cofinal)」と呼ばれていたが，双対を取ることとは関係ないので，いまは “co” を外した方がよさそうである[2]．また，部分集合 S はまず包含函手 $S \to \mathbf{N}$ で置き換えられ，さらに任意の函手で置き換えられるだろう．

函手 $L : J' \to J$ が共終 (final) であるとは，各 $k \in J$ についてコンンマ

[2]［訳注］日本語では二つの co の用法の区別が付くのでそのまま共終という訳語を用いることにする．

圏 $(k \downarrow L)$ が空でなく連結であることを言う．これは各 k に対してある対象 $j' \in J'$ および射 $k \to Lj'$ が存在し，さらに任意の二つのそのような射は



の形をした有限可換図式が得られるように連結できることを意味する．部分圏が**共終**であるとは，それに対応する包含函手が共終であることを言う．たとえば，J が線形順序で，$J' \subset J$ であり L が包含函手ならば，L が共終であるというのは単に各 $k \in J$ について $k \leqq j'$ を満たす $j' \in J'$ が存在することを意味する．

$L : J' \to J$ および $F : J \to X$ について，その両方の余極限が存在するときに定義されるカノニカルマップ

$$h : \underrightarrow{\operatorname{Colim}}\, FL \to \underrightarrow{\operatorname{Colim}}\, F \tag{1}$$

が存在する．実際，$\mu' : FL \dot{\to} \underrightarrow{\operatorname{Colim}}\, FL$ と $\mu : F \dot{\to} \underrightarrow{\operatorname{Colim}}\, F$ が余極限錐ならば，h はすべての $j' \in J'$ について $h\mu'_{j'} = \mu_{Lj'}$ を満たす一意的な X の射である．

ここでの主定理は以下の通りである．

定理 1 $L : J' \to J$ が共終であり $F : J \to X$ が $x = \underrightarrow{\operatorname{Colim}}\, FL$ が存在するような函手であるとき，$\underrightarrow{\operatorname{Colim}}\, F$ が存在してカノニカルマップ (1) は同型となる．

証明　余極限錐 $\mu : FL \dot{\to} \underrightarrow{\operatorname{Colim}}\, FL = x$ が与えられたとき，各 $k \in J$ について射 $u : k \to Lj'$ を選び，τ_k を合成

$$Fk \xrightarrow{Fu} FLj' \xrightarrow{\mu_{j'}} x$$

とすることによって射 $\tau_k : Fk \to x$ を構成する．μ は錐で $(k \downarrow L)$ は連結なので，上記の連結性の図式からすぐに τ_k が u や j' の選び方によらないことがわかる．よって直ちに $\tau : F \dot{\to} x$ が頂点 x と底 F を持つ錐となることが言

える．一方，もし $\lambda : F \dot{\to} y$ が F を底に持つ別の錐ならば，$\lambda L : FL \dot{\to} y$ は FL を底に持つ錐となる．よって μ の普遍性から一意的な $f : x \to y$ が存在して $f\mu = \lambda L$ となり，よって（$\lambda_k = \lambda_{Lj'} \circ Fu$ から）$f\tau = \lambda$ となる．よって τ が余極限錐となり，$x = \varinjlim F$ が成り立つ．このことから，カノニカルマップ h が同型になることは明らかである． □

L が共終であるという条件はこの定理が成り立つために必要である（演習問題 5 を参照）．この結果の双対（共終の双対は「共始[3]」）は極限に対して役立つ．

演習問題

1. $j \in J$ かつ $\{j\}$ が j を唯一の対象とする J の離散部分圏ならば，包含函手 $\{j\} \to J$ が共終であるのと j が J の終対象であるのは同値であることを示せ．このことから余極限と終対象について何か言えるか？
2. 共終函手の合成は共終函手であることを示せ．
3. J がフィルター，$L : J' \to J$ が充満であり，かつ各 $k \in J$ について $(k \downarrow L)$ が空でないとき，L が共終であることを証明せよ．
4. 共変 hom 函手 $J(k,-) : J \to \mathbf{Set}$ について，米田の補題を用いて $\varinjlim J(k,-)$ が一点集合であることを示せ．
5. （本文の定理の逆）$L : J' \to J$ を函手とする．ただし J' と J は小さな hom 集合を持ち，余完備な X およびすべての $F : J \to X$ についてカノニカルマップ $\varinjlim FL \to \varinjlim F$ は同型とする．このとき L は必ず共終となることを証明せよ．（ヒント：$F = J(k,-)$, $X = \mathbf{Set}$ および演習問題 4 を利用せよ．）

4 対角的な自然性

次に自然性の概念の拡張を考える．圏 C, B と函手 $S, T : C^{\mathrm{op}} \times C \to B$ が与えられているとき，**対角自然変換** (dinatural transformation) $\alpha : S \ddot{\to} T$ とは各対象 $c \in C$ に B の射 $\alpha_c : S(c,c) \to T(c,c)$ を割り当てる関数 α のことである．ただし，c 上の α の**コンポーネント** (component) と呼ばれるこの α_c は C のすべての射 $f : c \to c'$ について以下の六角図式

[3] ［訳注］始対象の initial とは別の概念である．ただし演習問題 1 を参照．

$$\begin{array}{ccccc} & S(c,c) & \xrightarrow{\alpha_c} & T(c,c) & \\ {}^{S(f,1)}\nearrow & & & & \searrow^{T(1,f)} \\ S(c',c) & & & & T(c,c') \\ {}_{S(1,f)}\searrow & & & & \nearrow_{T(f,1)} \\ & S(c',c') & \xrightarrow{\alpha_{c'}} & T(c',c') & \end{array} \qquad (1)$$

が可換となるように割り当てられている．S と T の第一引数における反変性がこの図式における射 $S(f,1)$ および $T(f,1)$ を作る上で用いられていることをよく見られたい．

双函手 S と T の間の通常の自然変換 $\tau : S \dot{\to} T$ でコンポーネント $\tau_{c,c'}$: $S(c,c') \to T(c,c')$ を持つものから，コンポーネントがちょうど τ の対角コンポーネントであるような，すなわち $\alpha_c = \tau_{c,c}$ であるような同じ双函手間の対角自然変換 $\alpha : S \ddot{\to} T$ が得られる．さらに興味深い例が，一つ以上の変数について「ダミー」であるような函手から現れる．たとえば，Q が第二因数への射影であり T_0 が（一変数の）ある函手であるとして，$T : C^{\mathrm{op}} \times C \to B$ が合成

$$C^{\mathrm{op}} \times C \xrightarrow{\;Q\;} C \xrightarrow{\;T_0\;} B$$

ならば，これは第一変数についてダミーである．別の言い方をすれば，一変数の各函手 $T_0 : C \to B$ は第一変数についてダミーである双函手 $C^{\mathrm{op}} \times C \to B$ として扱うことができる．この場合も，**両方の**変数についてダミーである函手は実質的に定数対象 $b \in B$ であり，すべての対象 $c, c' \in C$ について $T(c,c') = b$ かつ C のすべての射 f および f' について $T(f,f') = 1_b$ となる．

次のようなタイプの対角自然変換 $S \ddot{\to} T$ も現れる．S が第二変数についてダミーで T が第一変数についてダミーであるとき，対角自然変換 $\alpha : S \ddot{\to} T$ は函手 $S_0 : C^{\mathrm{op}} \to B$ を，C のすべての射 $f : c \to c'$ について図式

$$\begin{array}{ccc} S_0c & \xrightarrow{\alpha_c} & T_0c \\ {\scriptstyle S_0f}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle T_0f} \\ S_0c' & \xrightarrow{\alpha_{c'}} & T_0c' \end{array} \qquad (2)$$

が可換になるようなコンポーネント $\alpha_c : S_0c \to T_0c$ によって，共変な T_0 :

$C \to B$ に写す．そのような対角自然変換は反変函手 $\overline{S}_0$ から共変函手 T_0 への自然変換と呼ぶべきかもしれない．(双対的に，共変函手から反変函手へのものも考えられる．)

もし $T = b : C^{\mathrm{op}} \times C \to B$ が両方の変数についてダミーならば，対角自然変換 $\alpha : S \xrightarrow{..} b$ は図式

$$\begin{array}{ccc} S(c', c) & \xrightarrow{S(1,f)} & S(c', c') \\ {\scriptstyle S(f,1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{c'}} \\ S(c, c) & \xrightarrow[\alpha_c]{} & b \end{array} \tag{3}$$

がすべての射 $f : c \to c'$ について可換になるようなコンポーネント $\alpha_c : S(c, c) \to b$ からなる．(六角図式 (1) の右側が潰れて一つの対象 b になる．) そのような変換 $\alpha : S \xrightarrow{..} b$ を**特別自然** (extranatural) 変換,「超自然」変換, あるいは S から b へのくさび (wedge) と呼ぶ．同様の術語は，すべての正方図式

$$\begin{array}{ccc} b & \xrightarrow{\beta_c} & T(c, c) \\ {\scriptstyle \beta_{c'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T(1,f)} \\ T(c', c') & \xrightarrow[T(f,1)]{} & T(c, c') \end{array} \tag{4}$$

が可換になるようなコンポーネント $\beta_c : b \to T(c, c)$ により与えられる，双対な概念 $\beta : b \xrightarrow{..} T$ にも当てはまる．(六角図式 (1) の左側が潰れる．)

各タイプについての例を挙げる．ユークリッドベクトル空間 E は実数体 $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間で，双線型かつ対称で正値性を満たす内積関数 $(\ ,\ ) : E \times E \to \mathbf{R}$ を伴う．これらの空間は圏 **Euclid** の対象となり，この圏は内積を保存する線型写像を射に持つ．実ベクトル空間の圏への二つの函手

$$U : \mathbf{Euclid} \to \mathbf{Vct_R}\ , \qquad * : (\mathbf{Euclid})^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Vct_R}$$

が存在する．これらの函手はそれぞれ,「内積を忘却する」(共変) 忘却函手と「双対空間を取る」反変函手である．ここで，各ユークリッドベクトル空間 E について，$e \in E$ に対する割り当て $e \mapsto (e, -)$ は線型写像 $\kappa_E : E \to E^*$ となる．これらの関数 κ_E は U から $*$ への対角自然変換 κ (タイプ (2) の双

対）のコンポーネントとなる．これは，各ユークリッドベクトル空間がその双対空間と**自然**同型になるという，リーマン幾何においてはよく知られた事実である —— そしてこの事実を圏論的に表すために対角自然性の概念が必要になる．

評価．（小さな）集合 X について，V_X は各引数 $x \in X$ における各関数 $h : X \to A$ の値を取る．(小さな）集合 A を固定したとき，V_X を各対象 $X \in \mathbf{Set}$ について定義される関数

$$V_X : \hom(X, A) \times X \to A, \qquad \langle h, x\rangle \mapsto hx$$

と見なすことができる．二つの小さな集合 X および Y について，$\hom(X, A) \times Y$ は函手 $\mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ （の対象関数）となり，一方で，すべての射 $f : Y \to X$ について評価の自明な性質 $h(fx) = (hf)x$ から (3) と同様の正方図式が常に可換であることが言える．よって関数 V_X は特別自然変換

$$V : \hom(-, A) \times (-) \overset{\cdot\cdot}{\to} A$$

のコンポーネントとなる．V は引数 A においても（従来の意味で）自然であることをよく見られたい．つまり，評価による $\hom(X, A) \times X \to A$ は X について対角自然（= 特別自然）であり，かつ A について自然である．

余単位元． 函手 $F : X \times P \to A$ および $G : P^{\mathrm{op}} \times A \to X$ について以下の x, p および a について自然な全単射

$$A(F(x, p), a) \cong X(x, G(p, a)) \tag{5}$$

は p をパラメータに持つ随伴である（第 IV 章第 7 節定理 3）．このとき，(5) の中で $x = G(p, a)$ とすることにより得られる先の随伴の余単位元は以下の a について自然であり p について対角自然（= 特別自然）なコンポーネント

$$\varepsilon_{\langle p, a\rangle} : F(G(p, a), p) \to a \tag{6}$$

の集まりとなる．これは上記の評価の場合を含む．

ここで対角自然性の双対タイプの例を挙げる．任意の圏 C において恒等関数は各対象 c に恒等射 $1_c : c \to c$ を割り当てる．これは要素 $1_c \in \hom(c, c)$ あるいは射 $1_c : * \to \hom(c, c)$ と見なすことができる．ただし $*$ は一点集合

である．さて $\hom(c,c')$ は函手 $C^{\mathrm{op}} \times C \to \mathbf{Set}$（の対象関数）であり，各射 $f : c \to c'$ について恒等関数 1 は自明な性質 $f \circ 1_c = 1_{c'} \circ f$ を持つ．これは先の言葉で言えば 1 は対角自然変換

$$1 : * \stackrel{..}{\to} \hom(-,-)$$

だということである．

三つのタイプの対角自然変換はすべて以前の意味での自然変換と組み合わさって生じる（そして実際，通常はこれらすべてのタイプを，特に強調する必要がある場合を除いて「対角」という言葉を付けずに，単に「自然変換」と呼ぶことになるだろう）．よって，圏と函手

$$S : C^{\mathrm{op}} \times C \times A \to B, \qquad T : A \times D^{\mathrm{op}} \times D \to B$$

が与えられたとき，自然変換 $\gamma : S \stackrel{..}{\to} T$ とは対象 $c \in C$, $a \in A$, $d \in D$ からなる各三つ組に B の射

$$\gamma(c,a,d) : S(c,c,a) \to T(a,d,d)$$

を割り当てる関数で，次の条件を満たすものである．(i) c と d を固定したとき，$\gamma(c,-,d)$ は従来の意味で a について自然である．(ii) a と d を固定したとき，$\gamma(-,a,d)$ は c について対角自然である．(iii) c と a を固定したとき，$\gamma(c,a,-)$ は d について対角自然である．これらの自然変換の記述において圏 A, B, C の内のいずれもいくつかの圏の積によって置き換えることができるし，また，それぞれの場合について積の引数 $c \in C = C' \times C''$ における自然性は組 $c = \langle c', c'' \rangle$ の各引数における他方を固定したときの自然性によって置き換えることができる（後の演習問題 3 を参照されたい）．たとえば，任意の圏において合成演算

$$\hom(b,c) \times \hom(a,b) \to \hom(a,c)$$

は自然，すなわち，a については自然，b については対角自然，c については自然となる．

二つの対角自然変換の合成は必ずしも対角自然変換とは限らないが，任意の対角自然変換 $\alpha : S \stackrel{..}{\to} T$ は，両方の引数において自然な変換を左右どちら

からでも合成することができる．$\sigma : S' \overset{\cdot}{\to} S$ および $\tau : T \overset{\cdot}{\to} T'$ が自然変換のとき，合成射

$$S'(c,c) \xrightarrow{\sigma_{c,c}} S(c,c) \xrightarrow{\alpha_c} T(c,c) \xrightarrow{\tau_{c,c}} T'(c,c)$$

は対角自然変換 $S' \overset{\cdot\cdot}{\to} T'$ のコンポーネントとなる．ここで（簡単に証明できる）より興味深い場合を取り上げる．

命題 1　函手

$$R : C \to B, \qquad S : C \times C^{\mathrm{op}} \times C \to B, \qquad T : C \to B$$

および（すべての $c,\, d \in C$ に対する）関数

$$\varrho(d,c) : R(c) \to S(d,d,c)\ , \qquad \sigma(c,d) : S(c,d,d) \to T(c)$$

で c については自然であり d については対角自然であるものが与えられたとき，各 $c \in C$ に合成射

$$R(c) \xrightarrow{\varrho(c,c)} S(c,c,c) \xrightarrow{\sigma(c,c)} T(c)$$

を割り当てる関数は自然変換 $R \overset{\cdot}{\to} T$ になる．

演習問題

1. パラメータ付きの随伴の単位元 $\eta_x : x \to G(p, F(x,p))$ が p について対角自然であること，およびこの性質が随伴自体の p についての自然性と同値であることを証明せよ（第 IV 章第 7 節の演習問題 2 を参照）．さらに双対化を考えよ．
2. パラメータ付きの随伴に対する三角恒等図式を定式化せよ．
3. （引数の分解による自然性）．$b \in B$，函手

   $$S : (C \times D)^{\mathrm{op}} \times C \times D \to B\ ,$$

   さらに，$c \in C$ および $d \in D$ に B の射

   $$\beta_{c,d} : S(c,d,c,d) \to b$$

   を割り当てる関数 β が与えられたとき，$\beta : S \overset{\cdot\cdot}{\to} b$ が対角自然であることと，β が（各 d を固定したときに）c について対角自然かつ（各 c を固定したときに）d について対角自然であることは互いに従うことを示せ．この結果の双対について述べよ．

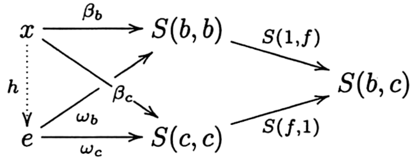
4. 命題 1 の合成規則を S が函手 $C \times C^{\mathrm{op}} \times C \times C^{\mathrm{op}} \times C \to B$ である場合に拡張せよ．因子 C が任意の奇数個ある場合についても同様の拡張をせよ．
5. $S : C^{\mathrm{op}} \times C \to B$ および $b, b' \in B$ について，対角自然変換 $b \ddot{\to} S$ および $S \ddot{\to} b'$ は一般には整合的に定義された合成 $b \to b'$ を持たないことを示せ．
6. 演習問題 3 および 4 を拡張して，多変数の自然変換の合成に関する一般的な規則を考えよ．

5 エンド

「エンド」は特殊な（そして特に役立つ）タイプの極限であり，普遍的な錐の代わりに普遍的なくさびによって定義される．

定義 5 函手 $S : C^{\mathrm{op}} \times C \to X$ のエンド (end) とはある定数 e から S への普遍的な対角自然変換のことを言う．つまり，S のエンドは組 $\langle e, \omega \rangle$ であって，e が X の対象，$\omega : e \ddot{\to} S$ がくさび（対角自然変換）であり，すべてのくさび $\beta : x \ddot{\to} S$ について一意的な X の射 $h : x \to e$ が存在して，すべての $a \in C$ について $\beta_a = \omega_a h$ を満たす．

したがって，C の各射 $f : b \to c$ についてある図式



(1)

が存在して両方の四辺形図式が可換になる（これらは対角自然性の条件である）．一方，ω の普遍性はある一意的な h が存在して（左にある）両方の三角図式が可換になることを述べている．

任意の普遍性に適用される一意性という性質は，この場合，もし $\langle e, \omega \rangle$ と $\langle e', \omega' \rangle$ が S に対する二つのエンドならば，ある一意的な同型 $u : e \to e'$ が存在して $\omega' \circ u = \omega$（つまり各 $c \in C$ について $\omega'_c \circ u = \omega_c$）となることを述べている．$\omega$ はコンポーネント ω_c を持つ**終結くさび** (ending wedge)，または**普遍くさび** (universal wedge) と呼ばれる．一方，対象 e は術語の濫用によりそれ自体も S の「エンド」と呼ばれ，積分の記法を用いて

$$e = \int_c S(c,c) = S \text{ のエンド}$$

と書かれる.「積分変数」c は積分記号の下に 2 回（反変で 1 回，共変で 1 回）現れており，積分記号によって「束縛され」ていることに注意されたい．なぜなら，その結果はもはや c には関係なく，したがって "c" が圏 C の対象を表す他の任意の記号で置き換えられても変わらないからである．これらの性質は微積分学における通常の積分 $\int f(x)dx$ における記号 x の性質と同様である．

自然変換からエンドの例が得られる．二つの函手 $U, V : C \to X$ は函手 $\hom_X(U-, V-) : C^{\mathrm{op}} \times C \to \mathbf{Set}$ を定義するが，もし Y が任意の集合ならば，

$$\tau_c : Y \to \hom_X(Uc, Vc), \qquad c \in C$$

をコンポーネントとするくさび $\tau : Y \ddot{\to} \hom_X(U-, V-)$ は各 $y \in Y$ および各 $c \in C$ に X の射 $\tau_{c,y} : Uc \to Vc$ を割り当てるものであり，すべての射 $f : b \to c$ について「くさびの条件」$Vf \circ \tau_{b,y} = \tau_{c,y} \circ Uf$ が成り立つ．しかしこの条件は正方図式

$$\begin{array}{ccc} Ub & \xrightarrow{\tau} & Vb \\ {\scriptstyle Uf}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Vf} \\ Uc & \xrightarrow{\tau} & Vc \end{array}$$

が可換であることに他ならず，このことは y が固定されたときの $\tau_{-,y}$ が自然変換 $\tau_{-,y} : U \dot{\to} V$ であることを主張している．それゆえ，すべてのそのような自然変換の集合を $\mathrm{Nat}(U, V)$ で書くとすると，割り当て $y \mapsto \tau_{-,y}$ は以下の図式が可換になるような一意的な関数 $Y \to \mathrm{Nat}(U, V)$ となる．

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\tau_c} & \hom(Uc, Vc) \\ \vdots & & \| \\ \mathrm{Nat}(U,V) & \xrightarrow{\omega_c} & \hom(Uc, Vc) \end{array}$$

ただし ω_c は，各自然変換 $\lambda : U \dot{\to} V$ にそのコンポーネント $\lambda_c : Uc \to Vc$ を割り当てている．これはまさに ω が普遍くさびであるということを述べて

いる．よって

$$\mathrm{Nat}(U,V)=\int_c \hom(Uc,Vc);\qquad U,V:C\to X \tag{2}$$

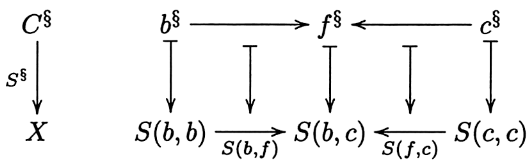
となる．

すべてのエンドは明らかに極限である —— 特に，エンドを定義する図式 (1) に現れる部分 $S(b,b)\to S(b,c)\leftarrow S(c,c)$ は C の f ごとに一つあるが，それに類似した部分から作られる X の適切な図式の極限である．このことは，C に依存する圏 $C^{\S}$ を（この節だけのために）次のように構成することによって，形式的に述べることができる．$C^{\S}$ の対象は $c\in C$ および C の射 f に対するすべての記号 $c^{\S}$ および $f^{\S}$ である（特に $c^{\S}$ と $(1_c)^{\S}$ は異なる対象であることに注意）．$C^{\S}$ の射はこれらの対象の恒等射であり，さらに C の各射 $f:b\to c$ について二つの射

$$b^{\S}\to f^{\S}\leftarrow c^{\S}$$

も $C^{\S}$ 上の射である．$C^{\S}$ の射の合成で意味のあるものは一方の因子が恒等射であるような合成だけである．こうして圏 $C^{\S}$ が定義できた．これを C の**細分圏** (subdivision category) と呼ぶ．

各函手 $S:C^{\mathrm{op}}\times C\to X$ から，C の典型的な $f:b\to c$ に対する以下の図



の中で示された（上から下への）割り当てによって函手 $S^{\S}:C^{\S}\to X$ が定義される．この図をよく見れば錐 $\tau:x\stackrel{\cdot}{\to}S^{\S}$ がちょうどくさび $\omega:x\stackrel{\cdot\cdot}{\to}S$ と同じものであることがわかる．これによって $S^{\S}$ の極限が以下の意味で S のエンドに等しいことが示される．

命題 1　任意の函手 $S:C^{\mathrm{op}}\times C\to X$ および上記で定義された対応する函手 $S^{\S}:C^{\S}\to X$ について，同型

$$\theta:\int_c S(c,c)\cong \varprojlim[S^{\S}:C^{\S}\to X] \tag{3}$$

が存在する．より詳しく述べると，上に示したエンドまたは上に示した極限のどちらかが存在すればその両方が存在し，そして X のある一意的な射 θ が存在してすべての $c \in C$ について図式

$$\begin{array}{ccc} \int_c S(c,c) & \xrightarrow{\omega_c} & S(c,c) \\ \theta \downarrow & & \| \\ \varprojlim S^{\S} & \xrightarrow{\lambda_c} & S^{\S}(c) \end{array}$$

が可換になる．ここで ω は終結くさびであり λ は極限錐である．さらに，この射 θ は同型となる．

系 2 X が小完備で C が小さいとき，任意の函手 $S : C^{\mathrm{op}} \times C \to X$ は X におけるエンドを持つ．

上記の命題はエンドを極限に帰着させるものである．その逆はもっと簡単である．すなわち，すべての極限はあるエンドと見なすことができる！

命題 3 各函手 $T : C \to X$ について S を合成函手

$$C^{\mathrm{op}} \times C \xrightarrow{Q} C \xrightarrow{T} X$$

とする．ただし Q は積の第二射影 $\langle c, c' \rangle \mapsto c'$ である．このとき，$\langle e, \tau : e \xrightarrow{\cdot} T \rangle$ が X における T の極限であることと，$\langle e, \tau : e \xrightarrow{\cdot\cdot} S \rangle$ が X における S のエンドであることは互いに従う．

証明　錐 $e \xrightarrow{\cdot} T$ のコンポーネント τ_c は C の各 $f : b \to c$ について三角図式 $\tau_c = Tf \circ \tau_b$ を可換にする（自然性の条件！）．このことからすべての正方図式

$$\begin{array}{ccc} e & \xrightarrow{\tau_b} & Tb = S(b,b) \\ \tau_c \downarrow & & \downarrow S(1,f) = T(f) \\ Tc = S(c,c) & \xrightarrow[S(f,1)=1]{} & Tc = S(b,c) \end{array}$$

が可換になることが言えて（$S(-,-)$ は第一引数について「ダミー」である），その結果，このことはまさに $\tau : e \xrightarrow{\cdot\cdot} S$ がくさびであることを述べている．

よって，τ が錐として普遍的であることと，それがくさびとして普遍的であることは互いに従う． □

この結果は次のように読むことができる．同型

$$\int_c S(c,c) = \int_c Tc \cong \operatorname{Lim} T$$

はエンドまたは極限が存在すれば存在し，終結くさびを極限錐に写す．よって，上に示した書き方を使えば，ダミー変数（S の第一変数 c）を明示的に記述しなくても任意の極限を積分（エンド）として書くことができる．

函手 $H : X \to Y$ が函手 $S : C^{\mathrm{op}} \times C \to X$ の**エンドを保存する** (preserve the end) とは，$\omega : e \ddot{\to} S$ が X における S のエンドならば $H\omega : He \ddot{\to} HS$ が HS のエンドになることを言う．これを記号で書くと

$$H \int_c S(c,c) = \int_c HS(c,c)$$

となる．同様に，H が S のエンドを**創出する** (create) とは，Y における各エンド $\nu : y \ddot{\to} HS$ について，ある一意的なくさび $\omega : e \ddot{\to} S$ が存在して $H\omega = \nu$ が成り立ち，このくさび ω が S のエンドになることを言う．(函手 S の）エンドは（対応する $S^{\S}$ の）極限と同じものなので，極限の保存に関してこれまで示してきた性質はエンドの保存についても繰り越されてくる．たとえば，hom 函手はエンドを次のように保存（および反転）する（反転については第 6 節を参照されたい）．

$$X(x, \int_c S(c,c)) = \int_c X(x, S(c,c)) \ , \tag{4}$$

$$X(\int^c S(c,c), x) = \int_c X(S(c,c), x) \ . \tag{5}$$

6　コエンド

函手 $S : C^{\mathrm{op}} \times C \to X$ のコエンドの定義はエンドの定義の双対である．S の**コエンド** (coend) は組 $\langle d, \zeta : S \ddot{\to} d \rangle$ で，対象 $d \in X$ および対角自然変換 ζ（くさび）からなり，S から定数への対角自然変換の中で普遍的である．対象 d は（それが存在して，同型を除いて一意的なときは）普通は積分記号

および上付きの束縛変数 c を用いて書かれる．つまり，

$$S(c,c) \xrightarrow{\zeta_c} \int^c S(c,c) = d$$

となる．コエンドの形式的な性質はエンドの形式的な性質の双対である．

コエンドは他の名前のもとでよく使われている．たとえば，環 R 上の加群のテンソル積はコエンドである．具体的に言うと，環 R は，一つの対象（それもまた R と呼ぶ）を持ち，射として要素 $r \in R$ を持ち，射の合成が R 上の積であるような Ab-圏である．左 R-加群 B は（一つの）対象 R をアーベル群 B に写し R の各射 r を B 上のスカラー積 $r_* : b \mapsto rb$ に写す加法函手 $R \to \mathbf{Ab}$ である．同様に，右 R-加群 A は加法函手 $R^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$（$R$ の $\mathbf{Ab}$ への反変函手）である．$\otimes$ を $\mathbf{Ab}$ における通常のテンソル積とすると，$R \mapsto A \otimes B$ は双函手 $R^{\mathrm{op}} \times R \to \mathbf{Ab}$ となる．さらに，コエンド

$$\int^R A \otimes B = A \otimes_R B$$

はちょうど R 上の通常のテンソル積となる．実際，双函手 $A \otimes B$ からアーベル群 M へのくさび ζ は，R のすべての射 r について図式

$$\begin{array}{ccc} A \otimes B & \xrightarrow{1_A \otimes r_*} & A \otimes B \\ {\scriptstyle r_* \otimes 1_B}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varrho} \\ A \otimes B & \xrightarrow{\varrho} & M \end{array}$$

が可換であるようなアーベル群の（単一の）モルフィズム $\varrho : A \otimes B \to M$ に他ならない．上のように加群を函手として翻訳すると，これは要素 $a \in A$ および $b \in B$ について

$$\varrho(ar \otimes b) = \varrho(a \otimes rb)$$

であることを意味する．それゆえ M がすべての $ar \otimes b - a \otimes rb$ を法とする $A \otimes B$ となるちょうどそのときに M はコエンドとなり，これはテンソル積 $M = A \otimes_R B$ の通常の記述に他ならない．

これらの知見の要点は，よく知られたものをあまり知られていないものに（テンソル積をコエンドに）帰着させることではなく，よく知られたものを拡張してさらに多くの場合を網羅することである．B を第 VII 章にあるような

乗法 $\Box$ を持つ任意のモノイダル圏とすると，任意の二つの函手 $T : P^{\mathrm{op}} \to B$ および $S : P \to B$ は B の対象である「テンソル積」

$$T \,\Box_P\, S = \int^P (Tp) \,\Box\, (Sp)$$

を持つ．第 VII 章第 5 節の単体圏 Δ は函手 $\triangle : \Delta \to \mathbf{Top}$（各順序数 $n+1$ が n 次元アフィン単体によって実現されている）を持ち，その一方で任意の $S : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ は単体集合と呼ばれる．このとき余冪 $S \cdot X$（空間 X の集合 S 倍）は X を S だけコピーした直和 $\amalg_S X$ に他ならない．ゆえに $(n,m) \mapsto Sn \cdot \triangle m$ は函手 $\Delta^{\mathrm{op}} \times \Delta \to \mathbf{Top}$ であり，コエンド

$$\int^n (Sn) \cdot \triangle n \tag{1}$$

は単体集合 S に対する通常の**幾何学的実現** (geometric realization)（Lamotke [1968]，p.34 および May [1967]，p.55）となる．このコエンドによる式は幾何学的実現，すなわち各 $t \in Sn$ ごとに一つのアフィン n 単体からなる直和を取り，与えられた面作用と退化作用（Δ の射）に従ってそれらを貼り合わせることを一息で記述している．位相モノイドの（Stasheff-Milgram）分類空間（第 VII 章第 8 節の圏 **CGHaus** に最もうまい具合に収まる）に対しても同様の効率的な記述が存在する．これについては Mac Lane [1970] を見られたい．

演習問題

1. $S : C^{\mathrm{op}} \times C \to \mathbf{Set}$ について，一点集合 $*$ から S へのすべてのくさび $\omega : * \ddot{\to} S$ による集合 $\mathrm{Wedge}(*, S)$ は S のエンドであり，その終結くさびは $\omega \mapsto \omega_c(*) \in S(c,c)$ によって与えられることを証明せよ．**Set** 上の極限を錐の集合として明示的に記述するのと比較せよ．
2. すべての小さな積とイコライザを持つ圏 X はすべての小さなエンドを持つことを（極限を用いないで）直接証明せよ（第 V 章第 2 節の極限についての対応する証明を参照）．
3. 各圏 C について「よじれた射の圏 (twisted arrow category)」$C_\#$ が存在する．その対象は C の射 $f : a \to b$ であり，射 $\langle h, k \rangle : f \to f'$ は［C の］射 $h : a' \to a$（よじれに注意！）および $k : b \to b'$ で $f' = kfh$ を満たすものである．このとき $\langle f : a \to b \rangle \mapsto \langle a, b \rangle$ は函手 $K : C_\# \to C^{\mathrm{op}} \times C$ である．任意の

$S : C^{\mathrm{op}} \times C \to B$ について，錐 $e \stackrel{\cdot}{\to} SK$ はくさび $e \stackrel{\cdot\cdot}{\to} S$ に対応することを証明せよ．また，この事実を用いてエンドの極限への帰着（第 5 節の命題 1）に対する別証明を与えよ．

4. **Fin**（空でない有限集合からなる骨格的な圏）を 0 でない有限順序数 n を対象に持ち，すべての関数 $f : n \to m$ を射に持つ圏とする．各集合 X について $n \mapsto X^n$ は函手 $(\mathbf{Fin})^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$（の対象関数）を定義する．各環 R について，各関数 $f : n \to m$（**Fin** の射）が並び $a_0, \ldots, a_{n-1} \in R^n$ を $b_0, \ldots, b_{m-1} \in R^m$（ただし $b_i = \Sigma a_j$ であり，これは $f_j = i$ を満たすすべての $j \in n$ の上の和）に写すとき，割り当て $n \mapsto R^n$ は共変函手 $R_{(\ )} : \mathbf{Fin} \to R\text{-}\mathbf{Mod}$ になる．集合 X で生成される自由 R-加群がコエンド

$$\int^n X^n \cdot R_{(n)}$$

になることを示し，さらにこの式が有限形式和 $\Sigma x_i a_i$, $i = 1, \ldots, n$ としての自由加群の要素に対する本質的に通常の記述であることを示せ．

5. D が余完備のとき，函手 $S : C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ および $T : C \to D$ はコエンド $\int^c (Sc) \cdot (Tc)$ として定義されるテンソル積を持つ．ここで $\cdot$ は余冪を表す．テンソル積は函手 $D^C \times \mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}} \to D$ であることを示せ．

7　パラメータ付きエンド

エンドに対する基本的な形式的性質は，微積分学における積分の性質と非常によく似ている．これらすべての性質は（ダミー変数を持つエンドと見なされる）極限にも同じようにうまく当てはまっていく．

命題 1　（自然変換のエンドもしくは極限）．函手 $S, S' : C^{\mathrm{op}} \times C \to X$ で共にそれぞれエンド $\langle e, \omega \rangle$ および $\langle e', \omega' \rangle$ を持つものの間の自然変換 $\gamma : S \stackrel{\cdot\cdot}{\to} S'$ が与えられたとき，X のある一意的な射 $g = \int_c \gamma_{c,c} : e \to e'$ が存在して以下の図式がすべての $c \in C$ について可換になる．

$$\begin{array}{ccc}
\int_c S(c,c) & \xrightarrow{\ \omega_c\ } & S(c,c) \\
{\scriptstyle g = \int_c \gamma_{c,c}} \Big\downarrow & & \Big\downarrow {\scriptstyle \gamma_{c,c}} \\
\int_c S'(c,c) & \xrightarrow{\ \omega'_c\ } & S'(c,c)
\end{array} \qquad (1)$$

証明　合成 $\gamma_{c,c} \circ \omega_c$ からくさびが定義できるので，g が存在し，さらにくさび ω' の普遍性により g が一意的であることがわかる．　□

このような射 g は自然変換 γ のエンドと呼ばれる．

γ と他の $\gamma' : S' \xrightarrow{\cdot\cdot} S''$ を合成することにより規則

$$\int_c (\gamma' \cdot \gamma)_{c,c} = \left[\int_c \gamma'_{c,c}\right] \circ \left[\int_c \gamma_{c,c}\right] \tag{2}$$

が得られる．この合成規則によって,（ある圏 P の）パラメータ p を含む極限（またはエンド）を，以下の意味で，そのパラメータの函手として示すことができる．

定理 2　（エンドと極限のパラメータ定理）．$T : P \times C^{\mathrm{op}} \times C \to X$ を函手とし，各対象 $p \in P$ について $T(p, -, -)$ は X 上にエンド

$$\omega_p : \int_c T(p, c, c) \xrightarrow{\cdot\cdot} T(p, -, -) \tag{3}$$

を持つとする．このとき $Up = \int_c T(p, c, c)$ を対象関数に持つある一意的な函手 $U : P \to X$ が存在して，各 $c \in C$ に対するくさび (3) のコンポーネントは p において自然な変換 $(\omega_p)_c : U_p \to T(p, c, c)$ を定義する．

証明　P の各射 $s : p \to q$ から自然変換 $\gamma = T(s, -, -) : T(p, -, -) \xrightarrow{\cdot} T(q, -, -)$ が定義できる．よって求める函手 U の射関数は，(1) で定義されるように，$Us = \int_c T(s, c, c)$ を満たす必要があり，さらに合成規則 (2) から Us に対するこの定義は函手 $U : P \to X$ を定めていることがわかる．　□

函手 U を $U = \int_c T(-, c, c)$ と書くことにしよう．すると

$$\left[\int_c T(-, c, c)\right] p = \int_c T(p, c, c), \qquad \left[\int_c T(-, c, c)\right] s = \int_c T(s, c, c) \tag{4}$$

が成り立つ．

この記法はこの函手 U 自体がエンドであることを示唆している．実際，$\int_c T(-, c, c)$ を函手圏 X^P の対象と見なし，$T : P \times C^{\mathrm{op}} \times C \to X$ を，C の射（または対象）f, f' について

$$T^{\#}(f, f') = T(-, f, f') : P \to X$$

とおくことにより得られる函手 $T^{\#}: C^{\mathrm{op}} \times C \to X^P$ で書き直せばよい．別の言い方をすれば，$T^{\#}$ は標準的な随伴

$$\mathbf{Cat}(P \times C^{\mathrm{op}} \times C, X) \cong \mathbf{Cat}(C^{\mathrm{op}} \times C, X^P)$$

による T の像になる．

定理 3　（パラメータ定理の続き）．T について同じ仮定のもとで，函手 $T^{\#}$ はエンド

$$\omega^{\#} : \int_c T(-, c, c) \ddot{\to} T^{\#}$$

を持つ．ただし，すべての $p \in P$ および $c \in C$ について $(\omega_c^{\#})_p = (\omega_p)_c$ である．

証明　エンド $\int_c T(-, c, c)$ は X^P の対象であり，その一方で $T^{\#}$ はコドメインが X^P の函手である．先の定理により，X の射 $(\omega_p)_c$ から，各 c について X^P の射（自然変換）

$$\omega_c^{\#} : \int_c T(-, c, c) \dot{\to} T(-, c, c)$$

が得られる．その p におけるコンポーネントは $(\omega_c^{\#})_p = (\omega_p)_c$ である．さらに，c を変化させることにより，$\omega^{\#}$ はくさび $\int_c T(-, c, c) \ddot{\to} T^{\#}$ になる．これは普遍くさびである．なぜなら，任意の対象 $F \in X^P$ および任意のくさび $\beta : F \ddot{\to} T^{\#}$ が与えられたとき，各コンポーネント β_p は対応するコンポーネント ω_p を通じて一意的に分解され，それにより β そのものも $\omega^{\#}$ を通じて一意的に分解されるためである．このことから求めていた $T^{\#}$ のエンドが得られた．　□

この定理は，第 V 章第 3 節の定理 1 における極限の場合に対して行ったように，函手圏 X^P の言葉で全体を定式化することもできる．

演習問題

1. (Dubuc)．函手圏 X^P と，点別極限 (pointwise limit) ではない極限を持つ函手 $T : C \to X^P$ を構成せよ．(提案：$C = \mathbf{2}$ とせよ．)

2. コエンドについてのパラメータ定理を述べて証明せよ．
3. X が小完備で C が小さいとき，命題 1 を用いて $\varprojlim : X^C \to X$ が函手であることを証明せよ（第 V 章第 2 節の演習問題 3 を参照）．
4. 任意の圏 X および P について,（離散部分圏 $|P|$ の）包含によって得られる函手 $X^P \to X^{|P|}$ がエンドおよびコエンドを創出することを示せ（第 V 章第 3 節の定理 2 を参照）．

8　累次エンドと極限

ここでは，どのようなときに「二重積分」が「累次 (iterated)」積分として得られるか（フビニの定理 (Fubini theorem)！）について説明する．

命題 1 $S : P^{\mathrm{op}} \times P \times C^{\mathrm{op}} \times C \to X$ を P の対象によるすべての組 $\langle p, q \rangle$ についてエンド $\int_c S(p,q,c,c)$ が存在するような函手とする．パラメータ定理により，これらのエンドを一つの双函手 $P^{\mathrm{op}} \times P \to X$ と見なし，S を双函手 $(P \times C)^{\mathrm{op}} \times (P \times C) \to X$ と見なす．このとき，同型

$$\theta : \int_{\langle p,c \rangle} S(p,c,p,c) \cong \int_p \left[\int_c S(p,p,c,c) \right]$$

が存在する．実際，左辺の「二重エンド」が存在することと右辺の $\int_p$ が存在することは互いに従う．そしてこのとき X のある一意的な射 θ が存在して図式

$$\begin{array}{ccccc}
\int_{\langle p,c\rangle} S(p,p,c,c) & & \xrightarrow{\quad\xi_{\langle p,c\rangle}\quad} & & S(p,p,c,c) \\
{\scriptstyle\theta}\,\vdots & & & & \| \\
\int_p \left[\int_c S(p,p,c,c)\right] & \xrightarrow{\varrho_p} & \int_c S(p,p,c,c) & \xrightarrow{\omega_{p,p,c}} & S(p,p,c,c)
\end{array}$$

が可換になる．ここで水平方向の射 ξ, ϱ および ω は，それぞれ対応するエンドに属する普遍くさびである．さらに，射 θ は同型である．

証明　各 $\langle p, q \rangle \in P \times P$ についてエンド

$$\omega_{p,q} : \int_c S(p,q,c,c) \ddot{\to} S(p,q,-,-)$$

が与えられているとする．任意の $x \in X$ について X の射からなる各 P-添字族 $\varrho_p : x \to \int_c S(p,p,c,c)$ は p を固定したときの合成

$$\xi_{p,c} : x \xrightarrow{\varrho_p} \int_c S(p,p,c,c) \xrightarrow{\omega_{p,p,c}} S(p,p,c,c)$$

として $(P \times C)$-添字族 $\xi_{p,c}$ を定める．p を固定したとき，$\xi_{\langle p,-\rangle}$ は明らかに c についてのくさびである．逆に，$\omega_{p,p}$ は普遍的なので，各 p について c において自然なすべての $(P \times C)$-添字族は，一意的な族 ϱ についてこのような合成となる．このとき ϱ または ξ が（後者はある c について）p において特別自然となることと，対応する以下の四角図式

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\varrho_p} & \int_c S(p,p,c,c) \\ {\scriptstyle \varrho_q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \int_c S(p,s,c,c)} \\ \int_c S(q,q,c,c) & \xrightarrow[\int_c S(s,q,c,c)]{} & \int_c S(p,q,c,c) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\xi_{p,c}} & S(p,p,c,c) \\ {\scriptstyle \xi_{q,c}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle S(p,s,c,c)} \\ S(q,q,c,c) & \xrightarrow[S(s,q,c,c)]{} & S(p,q,c,c) \end{array}$$

が P の各射 $s : p \to q$ について可換であることは互いに従う．また，第一の正方図式が可換になるのは，その図式がすべての対象 c について射 $\omega_{p,q,c}$ と合成した後に可換になるちょうどそのときである．これら二つの正方図式を前面と背面に並べて辺 1_x, $\omega_{p,p,c}$, $\omega_{p,q,c}$, $\omega_{q,q,c}$ を用いて（前面の各頂点から背面の頂点へ）つなげることにより立方体図式を作ってみよう．我々の定義により，これらの辺を含む四つの側面は可換になる．よって前面の正方図式が可換であることと，背面の正方図式がすべての c について可換であることは互いに従う．それゆえ ϱ が（p についての）くさびであることと，ξ が（$\langle p,c\rangle$ についての）くさびであることは互いに従い，x から $\int_c S(-,-,c,c)$ へのくさびは x から S へのくさびに一対一に対応する．エンドは普遍くさびであり，普遍なものは同型を除いて一意的に定まるので，これは命題の主張する同型 θ を与える． □

次の本質的な一点に注意されたい．この命題は，($p=q$ のときだけでなく) すべての組 $\langle p,q\rangle$ について内側の積分 $\int_c S(p,q,c,c)$ が存在するという条件で，二重積分を累次積分に帰着させている．極限の場合にはこのような微妙な区別を必要としない．

二重積分を二通りの方法で展開することにより，この結果から積分の順序の入れ換えに関するよく知られた結果が成り立つ．

系 2 $S: P^{\mathrm{op}} \times P \times C^{\mathrm{op}} \times C \to X$ を函手とし，すべての $p, q \in P$ および $b, c \in C$ について，エンド $\int_c S(p,q,c,c)$ および $\int_p S(p,p,b,c)$ が存在するものとする．パラメータ定理により，これらのエンドはそれぞれ（p, q もしくは b, c の）双函手と見なせる．このとき同型

$$\theta : \int_p \left[\int_c S(p,p,c,c)\right] \cong \int_c \left[\int_p S(p,p,c,c)\right]$$

が存在する．実際，左辺の（外側の）累次エンドが存在することと右辺の（外側の）累次エンドが存在することは互いに従い，同型 θ は図式

$$\begin{array}{ccccc}
\int_p \int_c S(p,p,c,c) & \longrightarrow & \int_c S(p,p,c,c) & \longrightarrow & S(p,p,c,c) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \theta} & & & & \Big\| \\
\int_c \int_p S(p,p,c,c) & \longrightarrow & \int_p S(p,p,c,c) & \longrightarrow & S(p,p,c,c)
\end{array}$$

がすべての $p \in P$ および $c \in C$ について可換になるような X の一意的な射である．ここで水平方向の射は関係する積分についての普遍くさびの適当なコンポーネントである．

これらの結果は極限や余極限についての対応する事実を含む．したがって，小さな P と C および完備な X を伴う函手 $F: P \times C \to X$ について，第 5 節の命題 3 により

$$\mathrm{Lim}_p \mathrm{Lim}_c F(p,c) \cong \mathrm{Lim}_{\langle p,c \rangle} F(p,c) \cong \mathrm{Lim}_c \mathrm{Lim}_p F(p,c)$$

であり，余極限についても対応する式が成り立つ．

注釈

極限についての，あり得る限りの性質に対する体系的な扱いは，シュヴァレーによる圏論についての原稿に含まれていた．しかし不幸にもその原稿は運送会社によって失われてしまった．

アイレンバーグと Kelly は Eilenberg-Kelly [1966b] において特別自然変換（および

それらの合成に関するすべての規則）を発見し，一方で対角自然変換は Dubuc-Street [1970] によって扱われた．函手のテンソル積は Kan [1958], §14 によって最初に定義された．これらの積は F. Ulmer と Allen Clark による未出版の仕事においてさらに発展させられた．

エンドのアイデアは Yoneda [1960] によって発見された．その効果的な利用は Day-Kelly [1969] による．彼らはこの概念が **Set** ではなく他の閉圏に基づく圏において本質的であるという知見を得た．Kelly [1982] も参照されたい．

第X章　カン拡張

M が C の部分集合であるとき，空でない集合 A への任意の関数 $t : M \to A$ は色々なやり方で C 全体へ拡張できるが，このような拡張を定義するカノニカルなもしくは一意的な方法は存在しない．しかしながら，M が C の部分圏であるときは，各函手 $T : M \to A$ は原理的に二つのカノニカルな（または極端な）M から函手 $L, R : C \to A$ への「拡張」を持つ．これらの拡張は適切な自然変換の持つ普遍性により特徴付けられる．拡張は常に存在するとは限らないが，M が小圏であり A が完備かつ余完備であるときには必ず存在し，ある極限として，もしくはあるエンドとして与えることができる．これらの「カン拡張」は圏論における基本的な概念である．カン拡張を用いて，各基本概念は他の概念で表現できることを再び見ることになる．この章は随伴を極限として表現することから始まり,「すべて」をカン拡張として表現することで終わる．

1　随伴と極限

極限と余極限は，もしすべての函手 $J \to C$ について存在するなら，それぞれ対角函手 Δ の右および左随伴をなす：

$$\begin{array}{ccccc} & & C & & \\ \underrightarrow{\mathrm{Lim}} & \uparrow & \Big\downarrow \Delta & \uparrow & \underleftarrow{\mathrm{Lim}} \\ & & C^J & & \end{array} \qquad (= \Delta \text{ の右随伴}). \tag{1}$$

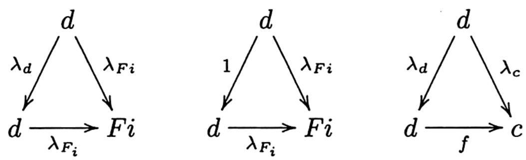
逆に左随伴は極限に翻訳することができる．まず，どの圏 C においても始対象は極限であることを見てみよう[1]：

$$\text{始対象}\ C = \mathrm{Colim}(\mathbf{0} \to C) = \varprojlim(\mathrm{Id} : C \to C). \tag{2}$$

ここで $\mathbf{0}$ は空圏（対象の集合が順序数 0 つまり空集合の圏）であり，$\mathbf{0} \to C$ は空函手である．始対象 e の定義で述べられているのは，まさにそれが空函手の余極限だということである．さらに，各対象 c に対する一意的な射 $\mu_c : e \to c$ は錐 $e \dot{\to} \mathrm{Id}_C$ を定義する．$\lambda : d \dot{\to} \mathrm{Id}_C$ が他のある頂点 d からの錐であるとき，一意的な射 $f : d \to e$ が存在して，すべての c について $\mu_c f = \lambda_c$ となる．実際，$c = e$ とするとこの等式は f が λ_e でなければならないことを示しているし，$f = \lambda_e$ とすれば，λ が Id_C 上の錐であることから等式 $\mu_c \lambda_e = \lambda_c$ が成り立つ．このことから［e が始対象ならば］$e = \mathrm{Lim}\,\mathrm{Id}_C$ が証明される．この逆の性質は Id のどの極限も始対象であるということであり，次の補題の特別な場合である．

補題 1　$\lambda : d \dot{\to} \mathrm{Id}_C$ が恒等函手上の錐であり，$F : J \to C$ が函手であって $\lambda F : d \dot{\to} F$ が F の極限錐となっているならば，d は C の始対象である．

証明　λ は錐であるので次の三角図式



は各 $i \in J$ および C の各射 f について可換である．しかし λF は極限錐であり，そのため最初の二つの三角図式から $\lambda_d = 1$ が証明される．そして三番目の三角図式により $f = \lambda_c$ となる．すなわち d から各 c への一意的な射 f が存在し，d はまさに始対象となる．□

この結果は始対象を極限に帰着している．ところで函手 $G : A \to X$ が

---

[1] ［訳注］以下では議論を簡単にするためにカノニカルな選択を仮定しているが，本質的には必要ない．

左随伴を持つのは，各 x についてすべての対 $\langle g : x \to Ga, a\rangle$ からなるコンマ圏 $(x \downarrow G)$ が始対象を持つちょうどそのときである．これを使えば左随伴を極限で表現することができる．$\langle g, a\rangle \mapsto a$ がコンマ圏の（第二）射影 $Q : (x \downarrow G) \to A$ を定義することを思い出そう．

定理 2 （随伴の存在についての形式的基準）．函手 $G : A \to X$ が左随伴を持つということは

(i) G が A で存在するすべての極限を保存する
(ii) 各 $x \in X$ について $\mathrm{Lim}(Q : (x \downarrow G) \to A)$ が A で存在する

の両方が成り立つことと同じである．これが成り立っているとき，左随伴 F は各 $x \in X$ について

$$Fx = \varprojlim(Q : (x \downarrow G) \to A) \tag{3}$$

として与えられ，各射 $g : x \to Ga$ の左随伴射 (left adjunct) は極限 (3) の極限錐 λ のコンポーネント $\lambda_g : Fx \to Qg = a$ となる．

証明 右随伴はすべての極限を保存するので，(i) は必要条件である．G への左随伴 F は各 $(x \downarrow G)$ 上に始対象 $\langle \eta_x : x \to GFx, Fx\rangle$ を持つので，このコンマ圏上の任意の函手は極限（つまり，その始対象における値）を持つ．よって (ii) も必要条件である．

これから逆を示したい．仮定 (ii) により，合成函手

$$(y \downarrow G) \xrightarrow{\mathrm{Id}} (y \downarrow G) \xrightarrow{Q} A \tag{4}$$

は各 $y \in X$ に対して A 上に極限を持つ．仮定 (i) により，G はすべての極限を保存する．よって，第 V 章第 6 節の補題を用いれば，Q がすべての極限を創出することがわかる．それゆえ Id は $(y \downarrow G)$ 上に極限を持つ．この極限は，(2) により，この圏における始対象となる．これをたとえば $y \to Ga$ で表す．しかるにこのとき a はある左随伴 F の値 $a = Fy$ になり，

$$Fy = Q[\varprojlim(\mathrm{Id} : (y \downarrow G) \to (y \downarrow G))] = \varprojlim(Q : (y \downarrow G) \to A)$$

が成り立つ．（なぜなら Q は創出させて作ったこの極限を保存するから！）こ

れは求める式であり，これから左随伴射を導く式が直ちに得られる． □

演習問題

1. 定理 2 の双対を述べよ．
2. （Bénabou による表現可能性についての形式的基準）．C は小さな hom 集合を持ち，$*$ は一点集合とする．次の命題を証明せよ．函手 $K : C \to \mathbf{Set}$ が表現可能であるとき，かつそのときに限り，(i) K は C 上に存在するすべての極限を保存し，(ii) コンマ圏の射影 $Q : (* \downarrow K) \to C$ は C 上に極限を持つ．この場合は，この射影の極限錐 $\lambda : r \dot{\to} Q$ は各 $h \in Kc$ に射 $\lambda_h : r \to c$ を割り当て，$h \mapsto \lambda_h$ は表現 $K \cong C(r, -)$ になる．
3. （普遍射についての形式的基準）．X は小さな hom 集合を持つとする．次の命題を証明せよ．$x \in X$ から $G : A \to X$ への普遍射が存在するとき，かつそのときに限り，(i) $X(x, G-) : A \to \mathbf{Set}$ はすべての極限を保存し，(ii) $\varprojlim Q : ((x \downarrow G) \to A)$ が A 上に存在する．
4. （形式的存在基準の改良）．
   (a) 定理 2 において，条件 (i) は「G は (ii) において存在が要求されている極限を保存する」で置き換えられることを示せ．
   (b) 演習問題 2 において，条件 (i) は「K は Q の極限を保存する」で置き換えられることを示せ．
5. （Bénabou による表現可能性と随伴）．C を小さな hom 集合を持つ圏とし，各 $K : C \to \mathbf{Set}$ から次のような圏 C_K を構成したとする．つまり，C_K は，C の対象および一つの新たな対象 ∞ を持ち，新たな hom 集合が $C_K(\infty, c) = Kc$，$C_K(\infty, \infty) = *$ つまり一点集合，$C_K(c, \infty) = \emptyset$ つまり空集合，を満たし，さらに適当な合成を持つような圏である．さらに $J_K : C \to C_K$ を包含函手とする．このとき K が表現可能であることと J_K が左随伴を持つことは互いに従うことを示せ．

2　弱普遍性

函手 $G : A \to X$ および対象 $x \in X$ が与えられたとき，x から G への**弱普遍** (weak universal) 射とは，表記の通り，対象 $r \in A$ と X の射 w からなる二つ組 $\langle r, w : x \to Gr \rangle$ で，すべての射 $f : x \to Ga$ について $f = Gf' \circ w$ を満たす射 $f' : r \to a$ が存在するようなものである．これは，f' が一意的で

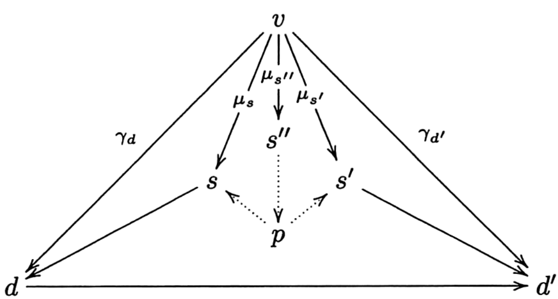
あることを要求しないという点を除けば，普遍射の定義そのものである．同じ方法（フレイド）により，弱積，弱極限，弱余積などを定義するあらゆる種類の普遍性を変更することができる（各場合において存在は要求するが一意性は要求しない）．

応用として，フレイドによる始対象の存在定理（第 V 章第 6 節定理 1）に対する二番目の証明を与える．

定理 1 D を小さな hom 集合を持つ小完備圏とすると，D が始対象を持つことと，D の対象からなる小さな集合 S が存在してそれが弱始 (weakly initial) である，すなわち各 $d \in D$ について $s \in S$ および射 $s \to d$ が存在することは互いに従う．

証明 上記のような S を取り，さらに S を D の充満部分圏として考える．こうしても，D は小さな hom 集合を持つので，S は小さい．よって完備性により包含函手 $F : S \to D$ は極限錐 $\mu : v \stackrel{\cdot}{\to} F$ を持つ．これから $v = \mathrm{Lim}\, F$ が D の始対象であることを示す．

まず，すべての $d \in D$ に対して $s \to d$ を選び γ_d を合成射 $\gamma_d : v \xrightarrow{\mu_s} s \to d$ として定義する．ここで $\gamma : v \stackrel{\cdot}{\to} \mathrm{Id}_D$ が錐であることを示そう．そのために，射 $f : d \to d'$ を任意に取り，図式



を作る．D は小完備なので，頂点 p を持つ $s \to d' \leftarrow s'$ の引き戻しが存在する．すると S は弱始的なので，射 $v \xrightarrow{\mu_{s''}} s'' \to p$ が存在する．S は充満なので，二つの合成射 $s'' \to p \to s$ および $s'' \to p \to s'$ は S に含まれる．よって（μ は錐なので）上の二つの四角形は可換であり，一方で p は引き戻しだ

から下の五角図式も可換である．これにより γ が錐であることが言えた．

γ を定義する際に $v \to s \to s$ を μ_s となるように選ぶとすれば，γ はその合成 $\gamma F : v \dot{\to} F$ が極限錐 μ となるような錐である．第 1 節の補題 1 より，v は D の始対象である．□

注意深く調べてみると，この証明は先の証明（第 V 章第 6 節）の改良に他ならないことがわかる．そこでは,（一つの弱始対象を得るために）まず積 Πs を取り，それから適切なイコライザを取る．今回の証明においては，これらの操作は一つに組み合わされる．つまり $F : S \subset D$ について $\operatorname{Lim} F$ を取る．

3　カン拡張

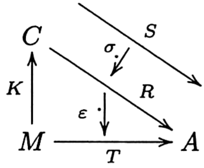
函手 $K : M \to C$ と圏 A が与えられたとして，函手 $S : C \to A$ を対象に持ち自然変換 $\sigma : S \dot{\to} S'$ を射に持つ函手圏 A^C を考え，さらに函手 $A^K : A^C \to A^M$ を

$$\langle \sigma : S \dot{\to} S' \rangle \mapsto \langle \sigma K : SK \dot{\to} S'K \rangle$$

という割り当てによって定義する．カン拡張の問題は A^K の左および右随伴を見つけることである．まず右随伴についてこの問題を考えよう．

定義 6 函手 $K : M \to C$ および $T : M \to A$ が与えられたとき，K に沿った T の**右カン拡張** (right Kan extension) とは函手 $R \in A^C$ および自然変換 $\varepsilon : RK \dot{\to} T$ からなる二つ組 R, ε である．ただし ε は $A^K : A^C \to A^M$ から $T \in A^M$ への射としての普遍射である．

いつものごとく，この普遍性から函手 $R = \operatorname{Ran}_K T$ が自然同型を除けば一意的に定まる．詳しく述べると，この普遍性によって，任意の組 $S, \alpha : SK \dot{\to} T$ についてある一意的な自然変換 $\sigma : S \dot{\to} R$ が存在して $\alpha = \varepsilon \cdot \sigma K : SK \dot{\to} T$ が成り立つ．そのときの図式は



$$\varepsilon : RK \dot{\to} T \qquad (1)$$

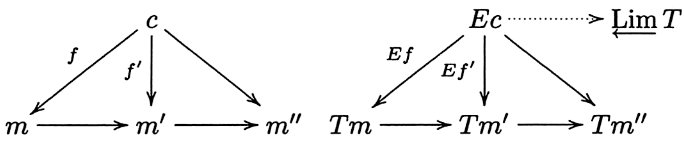
である．割り当て $\sigma \mapsto \varepsilon \cdot \sigma K$ は S について自然な全単射

$$\mathrm{Nat}(S, \mathrm{Ran}_K T) \cong \mathrm{Nat}(SK, T) \tag{2}$$

となる．ここでも，この自然な全単射によって K および T から $\mathrm{Ran}_K T$ が定まる．$\mathrm{Ran}_K T$ が hom 集合「Nat」の中の右側に現れているので，それを**右**カン拡張と呼ぶ（しかし何人かの著者はこの R を「左」カン拡張と呼ぶことに注意されたい）．

函手 A^K からすべての対象 T への普遍射が集まって函手 A^K への左随伴を構成するという一般的な結果によって，もしすべての函手 $T \in A^M$ が右カン拡張 $\langle R, \varepsilon_T : RK \stackrel{\cdot}{\to} T \rangle$ を持つならば，$T \mapsto R$ は A^K への右随伴（の対象関数）であり，ε はこの随伴の単位元であることがわかる．この後の議論の中で，個々の函手 T に関する右カン拡張を作っていく．それらの右カン拡張は，A^K の（完全な）右随伴が存在しないときでも，存在し得る．

有益な場合として M が C の部分圏で $K : M \to C$ が包含函手 $M \subset C$ という場合が挙げられる．この場合において，A^K は函手 $S : C \to A$ のドメインを部分圏 M に制限する演算になる．逆に，与えられた $T : M \to A$ について T の C への拡張 $E : C \to A$ を考える．このとき，$Ec \in A$ は C 上の各射 $f : c \to m$ に対して A 上の射 $Ef : Ec \to Tm$ を持たなくてはならず，これらの射が頂点 Ec から底 T への錐を形成しなければならない．ただし T は（固定された c から変数 m への）射 $f : c \to m$ からなる圏上の函手と見なされている．これらの射 f はコンマ圏 $(c \downarrow K)$ の対象であり，よって Ec に対する自然な選択は函手 $T : (c \downarrow K) \to A$ の（Ef を極限錐とする）極限となる．



この手順は（第 1 節の (3) と比べて）一般的に通用する．各 $c \in C$ についてコンマ圏 $(c \downarrow K)$ は対象 $\langle f, m \rangle$，略して f で表す，を持つ．ここで C において $f : c \to Km$ であり，一方で $\langle f, m \rangle \mapsto m$ は射影函手 $Q : (c \downarrow K) \to M$（の対象関数）である．

定理 1　（点別極限としての右カン拡張）．$K : M \to C$ が与えられたとし，$T : M \to A$ は函手で，各 $c \in C$ について合成 $(c \downarrow K) \to M \to A$ は極限錐 λ を伴う A 上の極限

$$Rc = \varprojlim((c \downarrow K) \xrightarrow{Q} M \xrightarrow{T} A) = \mathrm{Lim}_f Tm, \qquad f \in (c \downarrow K) \tag{3}$$

を持つとする．このとき，各 $g : c \to c'$ から一意的な射

$$Rg : \varprojlim TQ \to \varprojlim TQ' \tag{4}$$

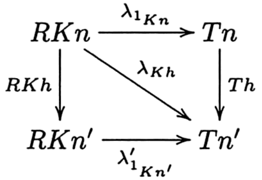
でこれらの極限錐と可換になるようなものが存在する．これらの式は函手 $R : C \to A$ を定義し，各 $n \in M$ に対する極限錐のコンポーネント $\lambda_{1_{Kn}} = \varepsilon_n$ は自然変換 $\varepsilon : RK \stackrel{\cdot}{\to} T$ を定義し，さらに R, ε は K に沿った T の右カン拡張になる．

証明　まず，上記の極限は $(c \downarrow K)$ の函手，ひいては c の函手になるという事実によって Rg は (4) で定義される．具体的に述べれば，与えられた $g : c \to c'$ と射影 $Q' : (c' \downarrow K) \to A$ について，各 $f' : c' \to Km$ から $f'g : c \to Km \in (c \downarrow K)$ が定まり，コンポーネント $\lambda_{f'g} : Rc \to Tm$ は Rc からの錐をなす．よって，［TQ' による］錐 λ' は普遍的なので，ある一意的な射 Rg が存在して Rg が作る図式

$$\begin{array}{ccc} Rc = \varprojlim TQ & \xrightarrow{\lambda_{f'g}} & Tm \\ \Big\downarrow{\scriptstyle Rg} & & \Big\| \\ Rc' = \varprojlim TQ' & \xrightarrow{\lambda'_{f'}} & Tm \end{array} \tag{5}$$

はすべての f' について可換となる．(実際，$f' \mapsto f'g$ から函手 $(g \downarrow K) : (c' \downarrow K) \to (c \downarrow K)$ が定義され，$TQ' = TQ \circ (g \downarrow K)$ となり，かつ Rg はカノニカルな比較 (comparison) となる（「共終函手」を参照）.）Rg に対するこの選び方から明らかに R は函手になる．

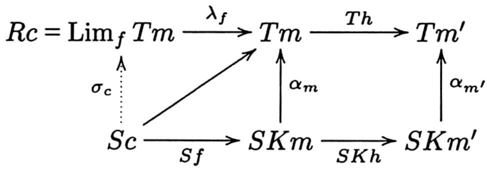
各 $n \in M$ について，1_{Kn} は $(Kn \downarrow K)$ の対象であり，よって極限錐 λ はコンポーネント $\lambda_{1_{Kn}} : RKn \to Tn$ を持つ．これを ε_n と呼ぼう．各 $h : n \to n'$ について図式



(6)

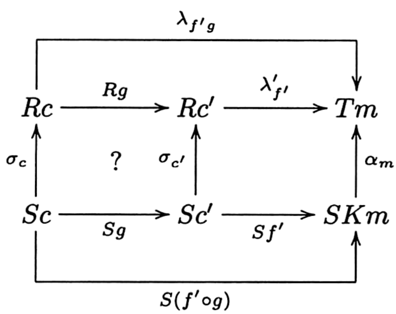
を作る．このとき，$g = Kh$ のときの Rg の定義により下の三角図式は可換となり，また λ は錐なので上の三角図式も可換になる．よってこの四角図式は可換になり，$\varepsilon : RK \dot{\to} T$ が自然変換であることが示せた．

ここで $S : C \to A$ を別の函手とし，自然変換 $\alpha : SK \dot{\to} T$ が存在したとする．$f : c \to Km$ に対する図式



(7)

から $\sigma_c : Sc \to Rc$ を作る．$(c \downarrow K)$ の各射 $h : \langle f, m\rangle \to \langle f', m'\rangle$ で $f' = Kh \circ f$ となるものについて，α は自然変換なので右側の四角図式は可換になる．これから対角射 $\alpha_m \circ Sf : Sc \to Tm$ が Sc からの錐をなすことがわかった．よって，(7) にあるような一意的な射 σ_c が存在する．σ が $g : c \to c'$ に対して自然であることを示すために，$(c' \downarrow K)$ 上の各 $f' : c' \to Km$ について図式



(8)

を作る．σ の定義により右側の四角図式と外側の四角図式は可換であり，Rg の定義 (5) により一番上の四角図式も可換である．よって（内側の）左側の四角図式の左-上の辺と下-右の辺にそれぞれ $\lambda'_{f'}$ を合成してできたものは可

換になる —— そして，このことはすべての f' について言える．しかるに λ' は極限錐なので，左側の四角図式は可換となる．よって σ は自然である．

$c = Kn, f = 1_{Kn}$ かつ $m = n$ のときの σ の定義 (7) から，$\alpha_n = \lambda_{1_{Kn}}\sigma_{Kn}$ が成り立ち，それゆえ $\alpha = \varepsilon \cdot \sigma K$ となる．このことから，$\varepsilon : RK \dot{\to} T$ はすべての α を適当な σ によって $\alpha = \varepsilon \cdot \sigma K$ として与えることがわかる．図式 (8) はこの性質を満たす σ が一意的であることを示している．実際，この性質は σ のコンポーネント σ_{Kn} を定める．他のコンポーネントも定めたいので，(8) において $c' = Kn, f' = 1_{Kn}$ かつ $m = n$ とする．左側の四角図式は σ が自然ならば可換である．よって，すべての $g : c \to Kn$ について $\lambda_g \circ \sigma_c$ が定まる．しかるに λ は極限錐なので，σ_c が定まる．以上により ε が普遍的であることが示せた．□

系 2 M が小圏で A が完備圏ならば，任意の函手 $T : M \to A$ は任意の $K : M \to C$ に沿った右カン拡張を持ち，A^K は右随伴を持つ．

このことは特に $A = \mathbf{Set}$ の場合に役に立つ．これはもともとは Kan [1958] によって研究された事例である．

系 3 定理における函手 K が充満かつ忠実のとき，K に沿った T のカン拡張 R に関する普遍射 $\varepsilon : RK \dot{\to} T$ は自然同型 $\varepsilon : RK \cong T$ になる．

証明 $n \in M$ について，$c = Kn$ としたときのコンマ圏 $(c \downarrow K)$ 上の極限から RKn が得られる．K は充満かつ忠実なので，このコンマ圏のすべての対象 $f : Kn \to Km$ はある一意的な $h : n \to m$ について $f = Kh$ によって表すことができる．このことから $1 : Kn \to Kn$ がこのコンマ圏の始対象となり，ちょうどこの始対象で TQ を評価することによって $RKn = \varprojlim TQ$ が求められる．よって $RKn = Tn$ かつ $\varepsilon_n = 1$ となる．□

このこともカン拡張が実際の拡張となる事例を与える．

系 4 M が圏 C の充満部分圏，$T : M \to A$ が函手で，各合成 $(c \downarrow K) \to M \to A$ が A 上に極限を持つとき，ある函手 $R : C \to A$ が存在して $RK = T$

（つまり R は T を拡張する）が成り立ち，恒等自然変換 $1 : RK \dot{\to} T$ によって R は挿入函手 $K : M \to C$ に沿った T の右カン拡張になる．

証明 挿入函手 $M \to C$ に対して系 3 を適用すればよい． □

左カン拡張 $L = \mathrm{Lan}_K T$ も同様に，T から A^K への普遍射 η を伴う二つ組 $L, \eta : T \dot{\to} LK$ として記述される．これは $S \in A^C$ について自然な全単射

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Lan}_K T, S) \cong \mathrm{Nat}(T, SK) \tag{9}$$

を与える．求める余極限が存在するとき，L は

$$Lc = \underrightarrow{\mathrm{Colim}}((K \downarrow c) \xrightarrow{P} M \xrightarrow{T} A) \tag{10}$$

によって与えられる．ただし P は射影 $\langle m, Km \to c \rangle \mapsto m$ である．

演習問題

演習問題 1〜4 においてカン拡張のデータとして

$$K : M \to C, \qquad T : M \to A$$

を仮定する．

1. A が射圏 $\mathbf{2}$ で，M と C が集合のとき，函手 $T : M \to \mathbf{2}$ は M の部分集合と見なすことができる．$\mathbf{2}^M$ が反変冪集合 $\mathcal{P}(M)$ となること，および $\mathrm{Lan}_K T$ が関数 K による $T \subset M$ の順像となることを示し，さらに $\mathrm{Ran}_K T$ を記述せよ．
2. （表現可能函手のカン拡張）．$A = \mathbf{Set}$ かつ M および C が小さな hom 集合を持つとき，$M(m, -)$ の左カン拡張は $C(Km, -)$ と $\eta_m = 1_{Km}$ によって与えられる単位元 $\eta : M(m, -) \dot{\to} C(Km, K-)$ との二つ組になることを示せ．
3. M, C および A がすべて集合であり，さらに A が少なくとも二つの要素を持ち K が全射でないならば，$\mathrm{Lan}_T K$ も $\mathrm{Ran}_T K$ も存在しないことを証明せよ．
4. (Ulmer)．系 3 は,「K が充満かつ忠実」という仮定を「K が充満かつ T と同程度に忠実」という仮定に置き換えても，成り立つことを示せ．ここで K が「T と同程度に忠実」とは，M の任意の射 $h, h' : m \to n$ について，$Kh = Kh'$ ならば $Th = Th'$ であることを言う．
5. 任意の圏 M について，M_∞ を M に一つの新たな対象で M_∞ の終対象となる ∞ を加えて作られた圏とする．$T : M \to A$ について，T の極限錐は包含函手 $M \subset M_\infty$ に沿った T の左カン拡張になることと，その逆を,（最初の原理を用いて）証明せよ．

4　コエンドとしてのカン拡張

コエンドの計算はカン拡張に対するエレガントな式を与える．趣向を変えて左カン拡張を取り扱おう．

定理 1 函手 $K : M \to C$ および $T : M \to A$ が与えられて，すべての $m, m' \in M$ とすべての $c \in C$ について余冪 $C(Km', c) \cdot Tm$ が A 上に存在するとき，もしすべての $c \in C$ について以下のコエンドが存在するならば，T は K に沿った左カン拡張 $L = \mathrm{Lan}_K T$ を持つ．さらに，この場合において，L の対象関数はこのコエンド

$$Lc = (\mathrm{Lan}_K T)c = \int^m C(Km, c) \cdot Tm, \qquad c \in C \tag{1}$$

になる．

証明　パラメータ定理により，このコエンドを c の函手と見なすことができる．この函手と他の任意の函手 $S : C \to A$ を比較しよう．そのとき米田の補題と自然変換の集合を（集合からなる十分大きな充満圏 **Ens** 上の）エンドとして表現することにより

$$\begin{aligned} A(Tm, SKm) &\cong \mathrm{Nat}(C(Km, -), A(Tm, S-)) \\ &\cong \int_c \mathbf{Ens}(C(Km, c), A(Tm, Sc)) \end{aligned} \tag{2}$$

が成り立つ．ここで，以下に一連の同型を書き下す．

$$\begin{aligned} \mathrm{Nat}(L, S) &\cong \int_c A(Lc, Sc) && (\mathrm{Nat}\ \text{のエンドの公式}) \\ &\cong \int_c A(\int^m C(Km, c) \cdot Tm, Sc) && (L\ \text{の定義 (1)}) \\ &\cong \int_c \int_m A(C(Km, c) \cdot Tm, Sc) && (A(-, Sc)\ \text{の連続性}) \\ &\cong \int_c \int_m \mathbf{Ens}(C(Km, c), A(Tm, Sc)) && (\text{余冪の定義}) \\ &\cong \int_m \int_c \mathbf{Ens}(C(Km, c), A(Tm, Sc)) && (\text{フビニの定理}) \end{aligned}$$

$$\cong \int_m A(Tm, SKm) \qquad\qquad (\text{上記の (2)})$$

$$\cong \mathrm{Nat}(T, SK) \qquad\qquad (\text{Nat のエンドの公式})$$

ここで，先に示されたエンド $\int_m$ および $\int_c$ は共に存在するのでフビニの定理（エンドの交換）が適用できるし，**Ens** は集合からなる（A と C に対する hom 集合やすべての $S : C \to A$ に対する集合 $\mathrm{Nat}(L, S)$ および $\mathrm{Nat}(T, SK)$ を含むくらい）十分大きな圏である．各段階のものは S について自然なので，それらを合成して作った同型も S について自然であり，このことから $L = \mathrm{Lan}_K T$ が証明できた．□

定理の逆，つまり，もし $\mathrm{Lan}_K T$ が存在すればそれは各 c に対してコエンド (1) として得られる，を主張してはいないことに注意されたい．

このカン拡張の単位元 η は，$S = L$ として同型による鎖を追跡することにより得られる．この結果を以下に記録しておく．

定理 2 （コエンドとしてのカン拡張，つづき）．上記 (1) のカン拡張について，普遍射 $\eta : T \dot{\to} LK$ は，各 $n \in M$ に対して余冪の（$f = 1_{Kn} : Kn \to Kn$ に対する）入射 $i_{1_{Kn}}$ と終結くさび ω のコンポーネントとの合成を以下の図式で定義することにより，得られる．

$$\begin{array}{ccc} Tn & \xrightarrow{\;i_{1_{Kn}}\;} & C(Kn, Kn) \cdot Tn \\ & \searrow^{\eta_n} & \downarrow \omega_{n,Kn} \\ & & \int^m C(Km, Kn) \cdot Tm = (\mathrm{Lan}_K T)(Kn) \end{array}$$

上記より，左カン拡張について二つの公式が得られた —— 先のコエンドによる (1) と，余極限による第 3 節の (10) である．これらは密接に関係していて，同じ余極限の情報をまとめる二つの方法をわかりやすく形作っている (後の演習問題 1 を参照されたい)．これらの公式のどちらからでも第 3 節の系を導くことができる．右カン拡張も公式

$$(\mathrm{Ran}_K T)c = \int_m Tm^{C(c, Km)} \tag{3}$$

によって与えられ，これは先に示された冪（A の冪 $X, a \mapsto a^X$）とそのエンドが存在するときに成り立つ．

加法的カン拡張を考えてみよう．M, C, A は Ab-圏であり，与えられた函手 K および T は共に加法的であるとする．そのとき，K に沿った T の右 Ab-カン拡張を，第3節 (2) の**加法的**函手 S について自然な全単射を伴う加法的函手 $R' : C \to A$ として記述することができる．この函手 R' は K, T（および S）が加法的であることを忘却して得られる普通の右カン拡張と必ずしも一致するわけではない．しかしながら，R' をエンドを使った式 (3) によって得ることは依然として可能である．ただし，式に関わる（$a \in A$ および $C \in \mathbf{Ab}$ に対する）冪 a^C が，すべての $b \in A$ についての随伴

$$A(b, a^C) \cong \mathbf{Ab}(C, A(b, a)) \tag{4}$$

によって定義される「余テンソル」a^C に置き換えられているとする（Day-Kelly [1969]，Dubuc [1970] を参照されたい）．たとえば，$A = R\text{-}\mathbf{Mod}$ のとき，これによって（$a \in R\text{-}\mathbf{Mod}$ の R-加群構造から引き起こされる）自明な R-加群構造を伴う $a^C = \mathbf{Ab}(C, a)$ が得られる．

一つの例として導来函手を挙げる．$T : R\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ が右完全ならば，その左導来函手 $T_n : R\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ にはある連結モルフィズムが備わっており，これらのモルフィズムによってこれらの左導来函手は函手の連結列 (connected sequence of functors) と呼ばれるものになる（Mac Lane [1963a]，Cartan-Eilenberg [1956]）．基本的な例として，A が右 R-加群のとき，テンソル積の左導来函手 $A \otimes_R - : R\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ はねじれ積 $\mathrm{Tor}_n(A, -) : R\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ である．

T の左導来函手 T_n は次の「普遍的な」性質によって記述できる．つまり，$T_0 = T$ であり，かつ，もし S_n が任意の（加法的）函手の連結列ならば，各自然変換 $S_0 \xrightarrow{\cdot} T_0$ は函手の連結列の一意的なモルフィズム $\{S_n | n \geqq 0\} \to \{T_n | n \geqq 0\}$ へ拡張される．

この性質は以下のようにして書き直すことができる．$R\text{-}\mathbf{Mod}$ をより大きな Ab-圏 E に埋め込む．ここで E は対象 $\langle C, n \rangle$ を持ち，C は R-加群で n は負でない整数であり，また一方で hom 群は $E(\langle C, n \rangle, \langle B, m \rangle) = \mathrm{Ext}_R^{n-m}(C, B)$ であり，合成は米田積 (Yoneda product) によって得られる．このとき $C \mapsto$

$\langle C, 0\rangle$ は函手 $K : R\text{-}\mathbf{Mod} \to E$ となる．さらにこのとき加法的函手の連結列 $\{T_n | n \geqq 0\}$ は $T_*(C, n) = T_n(C)$ を満たす 1 引数の加法的函手 $T_* : E \to \mathbf{Ab}$ と同じものであり，一方で T_* は E のモルフィズムについて連結モルフィズムを与える．T の左導来函手の列 T_* に対する先に述べたこの普遍的性質はいまや

$$\mathrm{Nat}(S_*K, T) \cong \mathrm{Nat}(S_*, T_*)$$

と読める．このことはちょうど T_* が $K : R\text{-}\mathbf{Mod} \to E$ に沿った $T = T_0$ の右 Ab-カン拡張であること（そしてこのカン拡張の余単位元 $\varepsilon : T_*K \dot\to T$ は恒等変換であること）を述べている．

詳しくは Cartan-Eilenberg または Mac Lane [1963a] を参照されたい（そこでは圏 E は「次数付き Ab-圏 (graded Ab-category)」として，異なるが同値な方法によって扱われている）.

演習問題

1. 定理 1 のコエンドが存在するとき，これらのコエンドから Lan_K に関する第 3 節の式 (10) で要求される余極限が得られることを証明せよ．
2. 固定された K について，$\mathrm{Lan}_K T$ および $\mathrm{Ran}_K T$ が存在するとき，それらを T の函手として記述せよ．
3. (Dubuc). $\mathrm{Ran}_K T$ が存在し，$L : C \to D$ を任意の函手とする．このとき，$\mathrm{Ran}_{LK} T$ が存在するのと $\mathrm{Ran}_L \mathrm{Ran}_K T$ が存在するのは同値であること，およびそのときはこれら二つの函手（およびそれらの普遍射）は等しいことを証明せよ．
4. （Ulmer; Day-Kelly; 函手圏 A^C におけるコエンドとしてのカン拡張）．すべての $m', m \in M$ およびすべての $c \in C$ について $C(Km', c) \cdot Tm$ が存在するとき，$\langle m', m\rangle \mapsto C(Km', -) \cdot Tm$ は函手 $M^{\mathrm{op}} \times M \to A^C$（の対象関数）になることを示せ．$T$ が K に沿った左カン拡張を持つとき，かつそのときに限り，この双函手がコエンドを持つことを証明せよ．またそのときこのコエンドはカン拡張

$$\mathrm{Lan}_K T = \int^m C(Km, -) \cdot Tm$$

であることを証明せよ．$\mathrm{Lan}_K T$ に対する普遍射をコエンドを用いて記述せよ．
5. (Ulmer). 演習問題 4 と同様にして，$\mathrm{Ran}_K T$ の存在に関する必要十分条件を，函手圏 A^C の中で解釈される極限に関する式を用いて求めよ．

5　各点カン拡張

函手

$$C \xleftarrow{K} M \xrightarrow{T} A \xrightarrow{G} X \tag{1}$$

および余単位元 $\varepsilon : (\mathrm{Ran}_K T)K \dot{\to} T$ を持つ右カン拡張 $\mathrm{Ran}_K T$ が与えられているとき，G がこの右カン拡張を**保存する** (preserve) とは，$G \circ \mathrm{Ran}_K T$ が余単位元 $G\varepsilon : G(\mathrm{Ran}_K T)K \dot{\to} GT$ を持つ K に沿った GT の右カン拡張になることを言う．これは

$$G \circ \mathrm{Ran}_K T \cong \mathrm{Ran}_K(GT)$$

を含意する（が，それよりもさらに強い）．

右随伴 G が極限を保存することは既に知られている．それはカン拡張をも保存することをここで示そう．

定理 1 $G : A \to X$ が左随伴 F を持つとき，G は A 上に存在するすべての右カン拡張を保存する．

証明　まず準備として，随伴

$$A(Fx, a) \cong X(x, Ga), \qquad x \in X,\ a \in A$$

を考える．x の代わりに函手 $H : C \to X$ を考え，a の代わりに函手 $L : C \to A$ を考えたとき，すべての Lc および Hc においてこの随伴を適用することにより全単射

$$\mathrm{Nat}(FH, L) \cong \mathrm{Nat}(H, GL) \tag{2}$$

が得られる．(いつものように随伴は左側の F を右側の G に切り替えている.)

ここで随伴および何らかの K と $T : M \to A$ に対する右カン拡張 $\mathrm{Ran}_K T$ を仮定する．このとき任意の函手 $H : C \to X$ に対して以下の全単射

$$\begin{aligned}\mathrm{Nat}(H, G \circ \mathrm{Ran}_K T) &\cong \mathrm{Nat}(FH, \mathrm{Ran}_K T)\\ &\cong \mathrm{Nat}(FHK, T) \cong \mathrm{Nat}(HK, GT)\end{aligned}$$

が得られ，しかもこの全単射は H について自然である．ここで，最初と三番目は (2) の置き換えであり，二番目は右カン拡張の定義である．(すべての H に対する）これらの全単射の合成により $G \circ \mathrm{Ran}_K T$ は右カン拡張 $\mathrm{Ran}_K GT$ であることが示せた．これの余単位元を得るために，$H = G \circ \mathrm{Ran}_K T$ として恒等射の像を取る．そうすると $G\varepsilon$ が得られる．ここで $\varepsilon : (\mathrm{Ran}_K T)K \dot{\to} T$ は与えられたカン拡張の余単位元である． □

系 2 $R, \varepsilon : RK \dot{\to} T$ が右カン拡張で，A が小さな hom 集合とすべての小さな余冪を持つとき，各 $a \in A$ について，$A(a, R-) : C \to \mathbf{Set}$ は $A(a, T-) : M \to \mathbf{Set}$ の右カン拡張であり，余単位元 $A(a, \varepsilon-)$ を持つ．

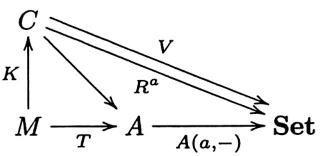
証明 函手 $A(a, -) : A \to \mathbf{Set}$ は余冪という左随伴 $X \mapsto X \cdot a$ を持つ． □

定義 7 $C \xleftarrow{K} M \xrightarrow{T} A$ が与えられていて，A が小さな hom 集合を持つとき，右カン拡張 R が**各点的** (point-wise) であるとは，R がすべての $a \in A$ についての表現可能函手 $A(a, -) : A \to \mathbf{Set}$ によって保存されることを言う．

定理 3 函手 $T : M \to A$ が $K : M \to C$ に沿った各点右カン拡張を持つこととすべての $c \in C$ について $(c \downarrow K) \to M \to A$ の極限が存在することは同値である．この場合，$\mathrm{Ran}_K T$ は第 3 節の定理 1 の式によって与えられる．

証明 $A(a, -)$ は極限を保存するので，極限の式によって得られる任意のカン拡張は各点的である．

逆に，各 $a \in A$ について，以下の図のように $A(a, T-) : M \to \mathbf{Set}$ が右カン拡張 $R^a = A(a, R-)$ を持つと仮定する．



このとき各函手 V について，図のように，V について自然な全単射

$$\mathrm{Nat}(V, R^a) \cong \mathrm{Nat}(VK, A(a, T-))$$

が存在する．これは特に何らかの $c \in C$ に対する $V = C(c, -)$ のときにも成り立つので，

$$\mathrm{Nat}(C(c, -), A(a, R-)) \cong \mathrm{Nat}(C(c, K-), A(a, T-))$$

が成り立つ．ここで左辺を米田の補題により変形し，右辺を後の補題によって変形することにより，Q を射影 $(c \downarrow K) \to M$ としての

$$A(a, Rc) \cong \mathrm{Cone}(a, TQ : (c \downarrow K) \to A)$$

が得られる．このことから錐の集合が表現可能となり，それによって TQ の極限が存在することが言える． □

ここで言い残した補題は以下の通りである．

補題 4 $K : M \to C$ が与えられたとき，全単射

$$\mathrm{Cone}(a, (c \downarrow K) \to M \to A) \cong \mathrm{Nat}(C(c, K-), A(a, T-))$$

が存在する．

証明　錐の条件に従うと，錐 $\tau : a \dot{\to} TQ$ は各 $f : c \to Km$ に射 $\tau(f, m) : a \to Tm$ を割り当て，さらに，各 $h : m \to m'$ について

$$\tau(Kh \circ f, m') = Th \circ \tau(f, m)$$

を満たす．自然変換 $\beta : C(c, K-) \dot{\to} A(a, T-)$ は各 $m \in M$ および各 $f : c \to Km$ に対して射 $\beta_m f : a \to Tm$ を割り当て，自然性の条件に従い各 $h : m' \to m$ について

$$\beta_{m'}(Kh \circ f) = Th \circ \beta_m f$$

を満たす．よって全単射 $\tau \leftrightarrow \beta$ が明らかに求まる． □

この定理の証明は次の系も示している．

系 5 $R, \varepsilon : RK \dot{\to} T$ が K に沿った T の各点カン拡張のとき，かつそのときに限り，すべての $a \in A$ および $c \in C$ について，

$$A(a, Rc) \to \mathrm{Nat}(C(c, K-), A(a, T-))$$

は全単射である．ただし，このマップは $g : a \to Rc$ を $m \in M$ におけるコンポーネントが

$$C(c, Km) \xrightarrow{R} A(Rc, RKm) \xrightarrow{A(g, \varepsilon_m)} A(a, Tm)$$

となる自然変換に写す．

演習問題

1. (1) の状態において，$\mathrm{Ran}_K T$ と $\mathrm{Ran}_K GT$ の両方が存在して，余単位元 ε および ε' を持つとき，ある一意的な自然変換（カノニカルマップ）$w : G \circ \mathrm{Ran}_K T \dot{\to} \mathrm{Ran}_K GT$ が存在して $\varepsilon' \cdot wK = G\varepsilon$ を満たすことを証明し，さらに G が $\mathrm{Ran}_K T$ を保存することと w が同型であることは同値であることを証明せよ．

6　稠密性

C の部分圏 M が C において**稠密** (dense) であるとは，C のすべての対象 c が M の対象によるある余極限になること，より正確に述べると，カノニカルな方法による余極限で，ある $m \in M$ から c へのすべての射 $m \to c$ からなる余極限錐を持つものになることを言う．より一般的には，稠密性は包含 $M \subset C$ だけでなく任意の函手 $K : M \to C$ に対しても定義することができる．そのとき射 $m \to c$ はコンマ圏 $(K \downarrow c)$ の対象 $\langle m, f : Km \to c \rangle$ に置き換えられる．このコンマ圏の射影 P^c, Q^c が $P^c\langle m, f \rangle = m$, $Q^c\langle m, f \rangle = f$ によって与えられることを思い出そう．また Q^c（の対象関数）は錐 $Q^c : KP^c \to c$ と見なせることにも注意しよう．

定義 8 函手 $K : M \to C$ が稠密であるとは，各 $c \in C$ について

$$\mathrm{Colim}((K \downarrow c) \xrightarrow{P^c} M \xrightarrow{K} C) = c \tag{1}$$

が成り立ち，その余極限錐が「カノニカルな錐 (canonical cone)」Q^c になることを言う．特に，C の部分圏 M が C において稠密であるとは包含函手 $M \to C$ が定義した通りの意味で稠密であることを言う．

定義 (1) は時々「カノニカルマップ $\mathrm{Colim}\, KP^c \to c$ は同型となる」という言い方で表現される．ここでカノニカルマップは余極限錐を Q^c に写す一意的な射 $k : \mathrm{Colim}\, KP^c \to c$ である．

たとえば，一点集合 $*$ は **Set** において稠密である．これを説明すると次のようになる．各集合 X について，コンマ圏 $(* \downarrow X)$ は，要素 $x \in X$ を関数 $x : * \to X$ と見なすことにより，$x \in X$ からなる集合（離散圏）そのものとなる．一方で (1) は各 X はその要素による余積 $\coprod x$ である（つまり，X を定義域とする関数 f は各 $x \in X$ における値 fx を特定することにより一意的に定まる）ことを述べていることになる．

双対的に，函手 $K : M \to C$ が**余稠密** (codense) であるとは，各 $c \in C$ について

$$\mathrm{Lim}((c \downarrow K) \xrightarrow{Q} M \xrightarrow{K} C) = c \tag{2}$$

が成り立ち，その極限錐が $\langle f : c \to Km, m \rangle$ を f に写すようなカノニカルな錐になることを言う．しかしこの極限はちょうど $\mathrm{Ran}_K K$ の定義に関わっているものである．よって以下のことが成り立つ．

命題 1　函手 $K : M \to C$ が余稠密であるとき，かつそのときに限り，Id_C は，恒等自然変換 $\mathrm{Id}_K : K \dot{\to} K$ を伴って，K に沿った K の各点右カン拡張になる．

この場合，第 5 節の系 5 のマップは各 $f : a \to c$ を自然変換

$$f^* = C(f, K-) : C(c, K-) \dot{\to} C(a, K-) \tag{3}$$

（変換 f^* は「右側への f の合成」となる）に写す対応に簡易化される（ε は恒等変換になる）．よって以下のことが成り立つ．

命題 2　函手 $K : M \to C$ が余稠密であるとき，かつそのときに限り，上記の対応 $f \mapsto C(f, K-)$ がすべての a および $c \in C$ について全単射

$$C(a,c) \cong \mathrm{Nat}(C(c,K-),C(a,K-)) \tag{4}$$

となる．これらはまた，

$$c \mapsto C(c,K-) : M \to \mathbf{Ens} \tag{5}$$

によって定義される函手 $C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ens}^M$ が充満かつ忠実であることと同値である．ただし M の hom 集合は $\mathbf{Ens}$ に含まれるとする．

系 3　M の hom 集合が集合からなる充満圏 $\mathbf{Ens}$ に含まれるとき，$Ym = M(m,-)$ によって与えられる米田の埋め込み $Y : M \to (\mathbf{Ens}^M)^{\mathrm{op}}$ は余稠密である．

証明　米田の補題それ自身により，各 $F : M \to \mathbf{Ens}$ について

$$(\mathbf{Ens}^M)^{\mathrm{op}}(F,Ym) = \mathbf{Ens}^M(Ym,F) \cong Fm$$

が成り立つ．よって先の (4) の右辺は，$C = (\mathbf{Ens}^M)^{\mathrm{op}}$, $a = F$ かつ $c = G$ としたとき，

$$\mathrm{Nat}(G,F) = (\mathbf{Ens}^M)^{\mathrm{op}}(F,G) = C(F,G)$$

となり，(4) は恒等対応になる．　□

この結果はしばしば次のように言われる．任意の函手 $M \to \mathbf{Ens}$ は表現可能函手によるカノニカルな極限である．

命題 2 の双対から，$K : M \to C$ が稠密なのと $c \mapsto C(K-,c)$ が充満かつ忠実な函手 $C \to \mathbf{Ens}^{M^{\mathrm{op}}}$ となるのが同値であることがわかる．応用として，有限生成のアーベル群からなる充満部分圏が $\mathbf{Ab}$ において稠密であることを示そう．K および任意の二つのアーベル群 A および B についてマップ

$$\mathbf{Ab}(A,B) \to \mathrm{Nat}(\mathbf{Ab}(K-,A),\mathbf{Ab}(K-,B))$$

が全単射であることを示せば十分である．まず単射であることは，A の巡回部分群上で等しい二つの準同型 $f,g : A \to B$ は至るところで等しくなくてはならないことからわかる．また全射であることも次のように示される．与えられた $\tau : \mathbf{Ab}(K-,A) \xrightarrow{\cdot} \mathbf{Ab}(K-,B)$ について，関数 $f : A \to B$ を，各

$a \in A$ に対し fa が 1 を a に写すようなマップ $\mathbf{Z} \to A$ における τ の値となるように定義する．$\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ は有限生成群なので，この関数は準同型になる．このとき，問題のマップによる f の像は τ と一致する．これで証明が完了した．この議論はより強いことを証明していることに注意されたい．つまり，$\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ のみを対象とする充満部分圏は $\mathbf{Ab}$ において稠密である．(アーベル群は二項演算によって定義される代数系なので，二つの被加数 $\mathbf{Z}$ が必要である．)

演習問題

1. R-$\mathbf{Mod}$ において，$R \oplus R$ のみを対象とする充満部分圏は稠密であることを示せ．
2. $\mathbf{Z}$ のみを対象とする充満部分圏は $\mathbf{Ab}$ において稠密ではないことを示せ．
3. $K : M \to C$ に対する**像圏** (image category) KM を，対象がすべての $m \in K$ に対する Km で，射が M のすべての h に対する Kh であるような C の部分圏とする．K が稠密ならば KM は C の周密な部分圏であることを証明せよ．
4. 部分圏 M の対象が C を生成するとき，かつそのときに限り，$c \mapsto C(K-, c)$ によって与えられる函手 $C \to \mathbf{Ens}^{M^{\mathrm{op}}}$ が忠実であることを証明せよ．
5. すべての余冪 $C(Km', c) \cdot Km$ が C において存在するとき，$K : M \to C$ が稠密なことと，各対象 $c \in C$ がコエンド
$$c = \int^m C(Km, c) \cdot Km$$
となり，余冪の入射 i_f において $\omega_m^c i_f = f : Km \to c$ とすることにより得られる余終結くさび $\omega_m^c : C(Km, c) \cdot Km \to c$ を伴うことは同値であることを証明せよ．

7　すべての概念はカン拡張である

カン拡張の概念は圏論に関する他のすべての基本的概念を含んでいる．

定理 1　函手 $T : M \to A$ が余極限を持つとき，かつそのときに限り，T は（一意的な）函手 $K_1 : M \to \mathbf{1}$ に沿った左カン拡張を持つ．このとき，$\operatorname{Colim} T$ は $\mathbf{1}$ の唯一の対象における $\operatorname{Lan}_{K_1} T$ の値である．

証明　函手 $S : \mathbf{1} \to A$ は対象 $a \in A$ に他ならないし，$K_1 : M \to \mathbf{1}$ について自然変換 $\alpha : T \xrightarrow{\cdot} SK_1$ は T を底に持ち a を頂点に持つ錐に他ならない．左

カン拡張 $L = \mathrm{Lan}_{K_1}T$ は普遍自然変換 $\eta : T \xrightarrow{\cdot} LK_1$ を与えることによって構成されるので，それは底 T を持つ普遍的な錐も与えることになり，よって T の余極限をも与えることになる． □

双対的に，同じ函手 K_1 に沿った右カン拡張から極限が得られる．

定理 2 （随伴の存在についての形式的基準）．函手 $G : A \to X$ が左随伴を持つとき，かつそのときに限り，右カン拡張 $\mathrm{Ran}_G 1_A : X \to A$ が存在し，G によって保存される．この場合は，この右カン拡張は G の左随伴 $F = \mathrm{Ran}_G 1_A$ になり，このカン拡張に関する余単位元である自然変換 $\varepsilon : (\mathrm{Ran}_G 1_A)G \xrightarrow{\cdot} 1_A$ は随伴の余単位元 $\varepsilon : FG \xrightarrow{\cdot} 1_A$ となる．

証明　G が左随伴 F を持ち，単位元 $\eta : 1_X \xrightarrow{\cdot} GF$ と余単位元 $\varepsilon : FG \xrightarrow{\cdot} 1_A$ を伴うとき，すべての函手 $H : A \to C$ に対して（特に恒等函手 1_A に対して），$S : X \to C$ について自然な全単射

$$\mathrm{Nat}(S, HF) \cong \mathrm{Nat}(SG, H) \tag{1}$$

を，割り当て

$$\{\sigma : S \xrightarrow{\cdot} HF\} \mapsto \{SG \xrightarrow{\sigma G} HFG \xrightarrow{H\varepsilon} H\},$$
$$\{\tau : SG \xrightarrow{\cdot} H\} \mapsto \{S \xrightarrow{S\eta} SGF \xrightarrow{\tau F} HF\}$$

によって構成することができる．一番目の割り当てを適用した後で二番目の割り当てを適用したものは恒等射 $\sigma \mapsto \sigma$ に等しい．なぜならば，図式

$$\begin{array}{ccccc} S & \xrightarrow{\sigma} & HF & =\!= & HF \\ {\scriptstyle S\eta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle HF\eta} & & \| \\ SGF & \xrightarrow{\sigma GF} & HFGF & \xrightarrow[H\varepsilon F]{} & HF \end{array}$$

が可換になるからである（最初の四角図式は水平合成 $\sigma\eta$ を二通りの方法で表したものであり，二番目の四角図式は η および ε に対する二つの三角恒等図式の一つに H を適用したものである）．逆の順序で合成したものも，同様の図式によって，恒等射になる．よって求める全単射が得られ，これは明らかに

S について自然である．$H = 1_A$ とすると，この全単射から $F = \mathrm{Ran}_G 1_A$ となり，その余単位元が $\sigma = 1_F$ の像，つまり ε となることがわかる．$H = G$ とすると，この全単射から $GF = \mathrm{Ran}_G G$ となり，その余単位は $G\varepsilon$ となることがわかる．よって G は右カン拡張 $\mathrm{Ran}_G 1_A$ を保存する．これで定理の前半は証明できた．

実際はもっと強いことが示されている．任意の H について，$HF = \mathrm{Ran}_G H$ となり，その余単位元は $H\varepsilon$ となる．よって $\mathrm{Ran}_G 1_A$ はどんな函手によっても保存される（$\mathrm{Ran}_G 1_A$ は**絶対** (absolute) カン拡張である）．このことを以下に定式化しておく．

命題 3 $G : A \to X$ が余単位元 $\varepsilon : FG \xrightarrow{\cdot} 1$ を伴う左随伴 F を持つとき，$\mathrm{Ran}_G 1_A$ が存在し，これは余単位元 ε を伴う F に等しく，どんな函手によっても保存される．

今度は逆に，1_A は G に沿った右カン拡張 R を持ち，この拡張は G によって保存されるとする．このとき $S : X \to A$ および $H : X \to X$ について自然な全単射

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi_S &: \mathrm{Nat}(S, R) \cong \mathrm{Nat}(SG, 1_A), & \varphi(S \xrightarrow{\ \rho\ } R) &= \varepsilon \cdot \rho G, \\ \psi = \psi_H &: \mathrm{Nat}(H, GR) \cong \mathrm{Nat}(HG, G), & \psi(H \xrightarrow{\ \sigma\ } GR) &= G\varepsilon \cdot \sigma G \end{aligned}$$

が存在し，それぞれ余単位元 $\varphi_R 1 = \varepsilon : RG \xrightarrow{\cdot} 1_A$ および $\psi_{GR} 1 = G\varepsilon : GRG \xrightarrow{\cdot} G$ を伴う．$\eta : 1_X \xrightarrow{\cdot} GR$ を $\psi_{\mathrm{id}}^{-1}(1 : G \xrightarrow{\cdot} G)$ として定義する．そのとき $\psi\eta = 1$ となり，よって

$$G\varepsilon \cdot \eta G = 1_G$$

が成り立つ．これは導入される随伴 $\varepsilon : RG \xrightarrow{\cdot} 1_A, \eta : 1_X \xrightarrow{\cdot} GR$ についての二つの三角恒等図式の一つである．もう片方は $\varepsilon R \cdot R\eta = 1_R$ を満たすはずである．全単射 φ_R を適用すれば，このことを確かめる代わりに $\varphi(\varepsilon R \cdot R\eta) = \varepsilon$ を証明すれば十分である．ε を使った φ の定義を考えると，以下の四角図式

$$\begin{array}{ccc} RG & \overset{R\eta G}{\underset{RG\varepsilon}{\rightleftarrows}} & RGRG \\ {\scriptstyle\varepsilon}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon RG} \\ 1_A & \overset{\varepsilon}{\longleftarrow} & RG \end{array}$$

が可換になることを示せばよい．最上部に点線状の矢印を加え（既に知られている）三角恒等図式 $G\varepsilon \cdot \eta G = 1$ の R による値を用いる．するとこの四角図式の可換性は，$\varepsilon\varepsilon : RGRG \to 1$ に対する二通りの表現は等しいということに帰着する．□

この節での議論はいままでのところカン拡張に関するどんな式も用いてこなかった．ここで，恒等函手 $I : C \to C$ に沿ったカン拡張という簡単な場合において，これらの式の意味について吟味しよう．カン拡張を定義する普遍性によって，各 $T : C \to A$ について

$$\mathrm{Lan}_I T = T, \qquad \mathrm{Ran}_I T = T$$

となることが即座に示せる．特に，$T : C \to \mathbf{Set}$ を考え，C が小さな hom 集合を持つと仮定する．そのとき，エンドとしての Ran_I に関する式において，関係するすべての冪は存在し，よってすべての $c \in C$ について

$$Tc = (\mathrm{Ran}_I T)c = \int_m Tm^{C(c,m)}$$

が成り立つ．しかるに Set において，$X^Y = \mathbf{Set}(Y, X)$ であり，第 IX 章第 5 節の (2) によりこのエンドは次のように自然変換の集合に帰着する．

$$Tc = \int_m \mathbf{Set}(C(c,m), Tm) \cong \mathrm{Nat}(C(c,-), T)\ .$$

この結果はまさに米田の補題である．

演習問題

1. 全単射 (1)（同様に第 5 節の (2)）は随伴四角図式（第 IV 章第 7 節の演習問題 4）に対して定義される全単射

$$\mathrm{Nat}(HG, G'K) \cong \mathrm{Nat}(F'H, KF)$$

の特別な場合であることを示せ．

2. $\mathrm{Ran}_K T$ に対する極限の式から米田の補題を求めよ．(これは米田の補題の独立な証明を与える．米田の補題は第 3 節の証明には用いられなかったことに注意.)
3. 以下の設問に答えよ．
  (a) $K : M \to C$ が自分自身に沿った右カン拡張 R を持ち，$\varphi : \mathrm{Nat}(S, R) \cong \mathrm{Nat}(SK, K)$ としたとき，$\langle R, \eta, \mu\rangle$ は C におけるモナドであることを示せ．ただし $\eta = \varphi^{-1}(\mathrm{Id}_K)$, $\mu = \varphi^{-1}(\varepsilon \cdot R\varepsilon)$ である．(これを K の**余稠密性モナド** (codensity monad) と呼ぶ.)
  (b) K が余稠密のとき，かつそのときに限り，η が同型であることを示せ．
  (c) $G : A \to X$ が左随伴 $F : X \to A$ を持ち，その単位元が $\eta : \mathrm{Id} \dot{\to} GF$ で余単位元が $\varepsilon : FG \dot{\to} \mathrm{Id}$ のとき，その余稠密性モナドが存在し，それは $\langle GF, \eta, G\varepsilon F\rangle$ となることを証明せよ．(このモナドはもとの随伴によって定義される.)

注釈

随伴についての形式的基準は Bénabou [1965] によるものである．極限や余極限によるカン拡張の構成は，受け手の圏 A が **Set** という重要な場合については，Kan [1960] においてカンによって成し遂げられた．この構成のインパクトは時間をかけて少しずつ理解されていった．1963 年に Lawvere はこれらの拡張を関数的意味論の中で用いた．Ulmer はそれらの重要性を強調し，非公開の論文の中で $\mathrm{Lan}_K T$ に対するコエンドによる式（コエンドという名前ではなかったが）を与えた．Bénabou（出版はしていない）および Day-Kelly [1969] は（Ab-圏を含む）相対圏におけるカン拡張を記述した．このアイデアは Dubuc [1970] によってさらに発展している．そこではカン拡張に対するコエンドの式が中心的な役割を果たした．

カルタン–アイレンバーグの導来函手の概念は，第 4 節で注意したように，カン拡張の独創的かつ決定的な例である．Verdier は，各アーベル圏を適当な導来圏に埋め込むことにより，カン拡張による導来圏に対するこの解釈を美しい形で表すことに成功した．説明は Quillen [1967] を参照されたい．

Isbell は，先進的な論文 [1960] の中で，$c \mapsto C(K-, c)$ が充満かつ忠実であるとき「左適合 (left adequate)」になるような函手 $K : M \to C$ を定義した．この割り当ては第 6 節の命題 2 の双対版の函手である．つまり，その定理によって「左適合であること」と「稠密であること」は一致する．Isbell は [1964] の代数からなる圏の特徴付けの中でこのアイデアをさらに発展させていった．

少しずつカン拡張は至るところに現れ発展していった．私はこの章にある多くのものを教え子である Eduardo Dubuc から学んだ．さらに Max Kelly は大きな進展，とりわけ各点カン拡張の応用を提案してきた．

第XI章　モノイダル圏における対称性と組み上げ

第 VII 章で導入したように，モノイダル圏は自然同型 α を介して結合的な二項「テンソル」積を持つ圏である．これらの圏についての主要な結果は「コヒーレンス」定理である．すなわち，α についてある五角図式（第 VII 章第 1 節 (5) 式）が可換ならば，この α を含むすべての図式が可換になる．ここではこの結果の様々な拡張を考えてみよう．

まず，このコヒーレンス定理から実は，モノイダル圏は「ストリクトな」モノイダル圏，すなわち単位対象についてのマップ λ や ρ と同様に結合律のマップが常に恒等射である圏と同値になる，という主張に至ることを見る．次に，対称モノイダル圏（第 VII 章第 7 節）とは，テンソル積が結合律だけでなく適切な自然同型 $\gamma : a\Box b \cong b\Box a$ を介して交換律も満たす圏である．再び，コヒーレンス定理が成り立つ．すなわち α と γ を含むすべての図式が可換になる．しかしながら，γ を恒等射にする（すなわち「ストリクト」にする）ことが常に可能であるとは限らない．これらの対称モノイダル圏は $\gamma^2 = 1$ を満たす（すなわち γ は自分自身の逆射である）．しかし他にも γ が「よじり (twist)」である，すなわち $\gamma^2 \neq 1$ であるようなモノイダル圏の適切な例が存在する．それは「組み紐付き (braided)」モノイダル圏であり，量子力学や結び目理論への応用において現れる（第 4 節）．

1　対称モノイダル圏

モノイダル圏 M とは双函手 $\otimes$ もしくは $\Box$

$$\Box : M \times M \to M$$

を持つ圏である．これは M の対象 a, b について様々な「積」

$$(a, b) \to a \Box b,\ a \otimes b,\ \text{または}\ ab$$

として書かれ，自然同型

$$\alpha : a(bc) \cong (ab)c \tag{1}$$

を介して結合律を満たし，自然同型

$$\lambda : ea \cong a\ , \qquad \rho : ae \cong e \tag{2}$$

を介して単位元となる要素 e を持つ．これらのマップはある可換性の要請，すなわち α について第 VII 章第 1 節 (5) のような五角図式

$$\begin{array}{ccccc} a(b(cd)) & \xrightarrow{\alpha} & (ab)(cd) & \xrightarrow{\alpha} & ((ab)c)d \\ \downarrow{\scriptstyle 1\alpha} & & & & \downarrow{\scriptstyle \alpha 1} \\ a((bc)d) & & \xrightarrow{\qquad\alpha\qquad} & & (a(bc))d \end{array} \tag{3}$$

および λ と ρ について二つの可換図式

$$\begin{array}{ccc} a(ec) & \xrightarrow{\alpha} & (ae)c \\ \downarrow{\scriptstyle 1\lambda} & & \downarrow{\scriptstyle \rho 1} \\ ac & = & ac \end{array} \qquad \lambda = \rho : ee \to e \tag{4}$$

を満たさなければならない．与えられた体 F 上のすべてのベクトル空間からなる圏で，積 $\Box$ として通常のベクトル空間のテンソル積 $\otimes$ を取り，単位元として 1 次元ベクトル空間 F を取るものは，モノイダル圏 M の標準的な例である．これを念頭において，モノイダル圏はしばしば**テンソル圏** (tensor category) と呼ばれる．

仮定された可換性 (3) と (4) は，第 VII 章第 2 節定理 1 の系にあるように，

α, λ, ρ からなる「すべての」図式が可換であるということを示すには十分である．すなわち，文字 $a, b, \ldots, e$ からなる任意の語 w が与えられたとき，w をすべての括弧が先頭から始まりすべての e を取り除いた語に写す α, λ, ρ の一意的な合成が存在する．(たとえば，(4) により，任意の e は結合律射 α の適用の前でも後でも除去することができて，同じ結果になる)．

後に提示する例は「組み上げ」のアイデアの例を示している．

モノイダル圏 M の**組み上げ** (braiding) とは，M の要素 a および b について自然である同型の族

$$\gamma_{a,b} : a\Box b \cong b\Box a \tag{5}$$

からなり，e について可換性

$$\begin{array}{ccc} a\Box e & \xrightarrow{\ \gamma\ } & e\Box a \\ {\scriptstyle\rho}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\lambda} \\ a & = & a \end{array} \tag{6}$$

を満たし，結合律射 α について以下の六角図式（記号 $\Box$ は省略）

$$\begin{array}{ccc} (ab)c & \xrightarrow{\ \gamma\ } & c(ab) \\ {\scriptstyle\alpha^{-1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} \\ a(bc) & & (ca)b \\ {\scriptstyle 1\cdot\gamma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\gamma\cdot 1} \\ a(cb) & \xrightarrow{\ \alpha\ } & (ac)b \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} a(bc) & \xrightarrow{\ \gamma\ } & (bc)a \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha^{-1}} \\ (ab)c & & b(ca) \\ {\scriptstyle\gamma\cdot 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1\cdot\gamma} \\ (ba)c & \xrightarrow{\ \alpha^{-1}\ } & b(ac) \end{array} \tag{7}$$

を共に可換にするものである．一つ目の図式は第一添字として積 ab を持つ各 $\gamma_{ab,c}$ を単一の添字を持つ二つの γ で置き換えており，二つ目の六角図式は第二添字として積を取る $\gamma_{a,bc}$ について同じことを行っていることに注意されたい．γ に関する (7) の一つ目の六角図式から γ^{-1} に関する二つ目の図式が従うことにも注意されたい．したがって，γ が M の組み上げであるとき，γ^{-1} も M の組み上げである．

既に第 VII 章第 7 節で定義した**対称モノイダル圏**は，すべての図式

$$\begin{array}{ccc} ab & \xrightarrow{\gamma_{a,b}} & ba \\ & \searrow & \Big\downarrow{\scriptstyle \gamma_{b,a}} \\ & & ab \end{array} \qquad (8)$$

が可換になるような組み上げ γ を持つ圏である．この場合，六角図式 (7) のどちらか一つから他方が従う．第 VII 章で示したようなモノイダル圏のコヒーレンス定理は，n 文字上の対称群 S_n を用いることで対称な場合に拡張されることになる．第 VII 章第 2 節と同様に，n 文字の □-語 w と S_n に属する置換 τ を考えてみよう．各対称モノイダル圏 M について,「置換された」語 $w\tau$ は函手 $(w\tau)_M : M^n \to M$ を決定する．これは w の引数を τ で置換することにより以下のように定義される．

$$(w\tau)_M(a_1, \ldots, a_n) = w(a_{\tau 1}, \ldots, a_{\tau n}) \ , \qquad a_i \in M \ .$$

定理 1　各対称モノイダル圏 M について，同じ長さ n の置換された語からなる各組 $(v\sigma, w\tau)$ に（一意的な）自然同型

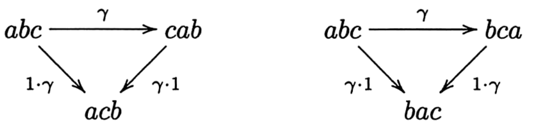
$$\mathrm{can}_M(v\sigma, w\tau) : (v\sigma)_M \to (w\tau)_M : M^n \to M \qquad (9)$$

を割り当てる関数が存在し，$v\sigma$ から $w\tau$ へのカノニカルマップと呼ばれる．これは M の恒等射と α と γ のすべてのインスタンスがカノニカルであるのと同様である．二つのカノニカルマップの合成および □ 積はカノニカルである．

証明　異なる置換された語の間には，常に少なくとも一つのこういったマップが存在する．なぜなら，括弧を再配置するのに α のインスタンスを使い，隣接する引数の互換に γ のインスタンスを使うことができるからである．このことからいかなる引数の置換も望むままに与えられることになる．なぜなら対称群のすべての置換は互換の連続により達成できるからである．恒等式 (7) は，単一引数 a と引数の積との交換が常に個々の引数についての交換の連続で置き換えられることを示している．

あと示さなければならないのは，$(v\sigma)_M$ から $(w\tau)_M$ へのこのような合成（「経路」）はいずれの二つを取っても等しいということである．結合律射のみ

についてのモノイダル圏のコヒーレンス定理（第 VII 章第 2 節）から，我々は既に $(v\sigma)_M$ から $(w\tau)_M$ に至る α の適用の列はいずれの二つを取っても等しくなることを知っている．ゆえに，積□がストリクトに結合的であり α が恒等射であることを仮定してもよい．この場合，二つの六角図式 (7) は二つの三角図式



(7a)

で置き換えることができる．

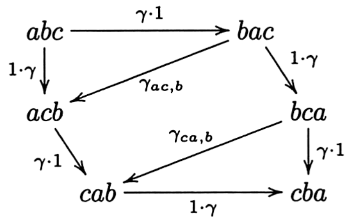
これらの恒等式は，我々が考える必要があるのは隣接する 2 文字 a, b を交換するステップの連続のみであることを示している．さて対称群 S_n は $i = 1, \ldots, n-1$ についての連続する文字の互換 $\tau_i = (i, 1+i)$ により生成される．そして，このような互換からなる任意の閉経路はこれらの生成元 τ_i の間のある関係に対応する．このような関係はすべていくつかの知られている「定義関係」の共役の積となり，（S_n についての）その定義関係は単に関係

$$\begin{aligned} \tau_i^2 &= 1, & i &= 1, \ldots, n-1, \\ (\tau_i \tau_{i+1})^3 &= 1, & i &= 1, \ldots, n-2, \\ \tau_i \tau_j &= \tau_j \tau_i, & 1 &\leqq i < j-1 \leqq n-2 \end{aligned} \tag{10}$$

と見なすことができることが知られている．ゆえに，コヒーレンスを証明するために必要なのは，この各関係について対応する経路の図式が可換であることを示すことだけである．

一つ目の関係 $\tau^2 = 1$ は (8) の仮定された性質 $\gamma^2 = 1$ に合致する．三つ目の関係については γ の自然性で十分である．二つ目の関係 $(\tau_1 \tau_2)^3 = 1$ については，$\gamma_{a,b}$ の自然性と (7a) の二つの三角図式のラベルを付け直すことで次のページの可換図式 (11) が与えられる．ここで図式の外辺は $\tau_1 \tau_2 \tau_1 = \tau_2 \tau_1 \tau_2$ を示しており，これは (10) について求められているものである．□

このコヒーレンス定理は，単位元を除去するマップ λ と ρ の使用を含むようにも拡張される．仮定 (6) は，γ を適用する前でも後でも任意の単位元を除去することができるということを規定しており，α についての対応する結



(11)

果は既に知られている．その結果として得られる定理の正確な定式化は読者に任せる．n より多くの引数を持ちその内のいくつかを単位元とするような語を考えることが必要である．第 VII 章第 2 節の系の文章は，e を含む「語」を用いる際には同様な調整を必要とする．それでもその結果は「α, λ, ρ, γ のみを含むすべての形式的な図式は可換となる」という事実を表している．

2　モノイダル函手

付加的な圏論的構造を持つ圏については，函手や自然変換に対応する構造を定義することが適切であろう．ここでは再びモノイダル圏の場合を考えてみよう（第 VII 章第 1 節）．

モノイダル圏 M および M' の間の**モノイダル函手** (monoidal functor) $(F, F_2, F_0) : M \to M'$ は次の三つの項目からなる．

(i) 圏の間の（通常の）函手 $F : M \to M'$.

(ii) M の対象 a, b について，M' のモルフィズム

$$F_2(a, b) : F(a)\Box F(b) \to F(a\Box b) \tag{1}$$

で a と b について自然なもの．

(iii) 単位元 e と e' について，M' のモルフィズム

$$F_0 : e' \to Fe\ . \tag{2}$$

これらは構造的マップ (structural map) α, λ, ρ を含む以下の三つの M' の図式をすべて可換にしなければならない．

$$\begin{array}{ccc}
F(a)\Box(F(b)\Box F(c)) & \xrightarrow{\alpha'} & (F(a)\Box F(b))\Box F(c) \\
\downarrow{\scriptstyle 1\Box F_2} & & \downarrow{\scriptstyle F_2\Box 1} \\
F(a)\Box(F(b\Box c)) & & (F(a\Box b)\Box F(c)) \\
\downarrow{\scriptstyle F_2} & & \downarrow{\scriptstyle F_2} \\
F(a\Box(b\Box c)) & \xrightarrow{F(\alpha)} & F((a\Box b)\Box c)
\end{array} \tag{3}$$

$$\begin{array}{ccc}
F(b)\Box e' & \xrightarrow{\rho} & F(b) \\
\downarrow{\scriptstyle 1\Box F_0} & & \uparrow{\scriptstyle F(\rho)} \\
F(b)\Box F(e) & \xrightarrow[F_2]{} & F(b\Box e)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
e'\Box F(b) & \xrightarrow{\lambda} & F(b) \\
\downarrow{\scriptstyle F_0\Box 1} & & \uparrow{\scriptstyle F(\lambda)} \\
F(e)\Box F(b) & \xrightarrow[F_2]{} & F(e\Box b)
\end{array} \tag{4}$$

二つのモノイダル函手の自明な合成はモノイダルである．

モノイダル函手は F_0 とすべての $F_2(a,b)$ が同型射であるとき**ストロング**であると言い，F_0 とすべての $F_2(a,b)$ が恒等射であるとき**ストリクト**であると言う（α, λ, ρ が恒等射であるときモノイダル圏がストリクトであることを思い出そう）．

二つのモノイダル函手の間のモノイダル自然変換 $\theta : (F, F_2, F_0) \to (G, G_2, G_0) : M \to M'$ は，基礎となる通常の自然変換 $\theta : F \to G$ の内で M' において図式

$$\begin{array}{ccc}
F(a)\Box F(b) & \xrightarrow{F_2} & F(a\Box b) \\
\downarrow{\scriptstyle \theta_a\Box\theta_b} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_{a\Box b}} \\
G(a)\Box G(b) & \xrightarrow{G_2} & G(a\Box b)
\end{array} \tag{5}$$

と

$$\begin{array}{ccc}
e' & \xrightarrow{F_0} & Fe \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle \theta_e} \\
e' & \xrightarrow{G_0} & Ge
\end{array} \tag{6}$$

がすべて可換になるものである．二つのモノイダル自然変換の自明な合成は自然である．

モノイダル函手 F について，積に関するマップ F_2 および単位元に関する

マップ F_0 を，n 文字の任意のテンソル語 v （これらの語は第 VII 章第 2 節で定義されている）により定義される函手に拡張することができる．このことから，このような各函手 v について，$a_1, \ldots, a_n$ において自然な変換

$$F_v : v(Fa_1, \ldots, Fa_n) \to Fv(a_1, \ldots, a_n) \tag{7}$$

が与えられ，$F_\Box$ が F_2 かつ F_e が F_0 ということになる．実際，語はさらに短い語のテンソル積 $v \Box v'$ として帰納的に定義され，$F_2(F_v \Box F_{v'})$ として $F_{v\Box v'}$ を取る．この定義を用いると，これらの自然変換におけるすべての図式が可換になるのは自明である．特に，v と w が二つのこのような n 文字の □-語であるとき，コヒーレンス定理はマップ α, ρ, λ から構築される一意的な自然変換 $\eta : v \to w$ を与える．こうして帰納法により，図式

$$\begin{array}{ccc} v(Fa_1, \ldots, Fa_n) & \xrightarrow{F_v} & Fv(a_1, \ldots, a_n) \\ \downarrow{\scriptstyle \eta} & & \downarrow{\scriptstyle F\eta} \\ w(Fa_1, \ldots, Fa_n) & \xrightarrow{F_w} & Fw(a_1, \ldots, a_n) \end{array} \tag{8}$$

が可換になる．(これはまさに条件 (3) と (4) の，任意の語への拡張である．) さらに，二つのモノイダル函手の間の任意のモノイダル自然変換 $\theta : F \to G$ と任意の語 v について，図式

$$\begin{array}{ccc} v(Fa_1, \ldots, Fa_n) & \xrightarrow{F_v} & Fv(a_1, \ldots, a_n) \\ \downarrow{\scriptstyle v(\theta_{a_1}, \ldots, \theta_{a_n})} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_v(a_1, \ldots, a_n)} \\ v(Ga_1, \ldots, Ga_n) & \xrightarrow{G_v} & Gv(a_1, \ldots, a_n) \end{array} \tag{9}$$

が可換になる．この条件は条件 (5) と (6) を一般化している．

B と B' が組み紐付き（もしくは対称）モノイダル圏であるとき，組み紐付きモノイダル函手はモノイダル函手 $(F, F_2, F_0) : B \to B'$ であって組み上げ γ と γ' と次の意味で可換なものである．

$$\begin{array}{ccc} Fa \Box Fb & \xrightarrow{\gamma'} & Fb \Box Fa \\ \downarrow{\scriptstyle F_2} & & \downarrow{\scriptstyle F_2} \\ F(a \Box b) & \xrightarrow{F(\gamma)} & F(b \Box a) \end{array} \tag{10}$$

ここで γ と γ' はそれぞれ B と B' の組み上げである．組み紐付きモノイダル圏の圏は，これらの組み紐付きモノイダル函手を射に持つ．

3 ストリクトモノイダル圏

定理 1 任意のモノイダル圏 M は，あるストロングモノイダル函手 $G: M \to S$ とストロングモノイダル函手 $F: S \to M$ により，あるストリクトモノイダル圏 S と圏論的に同値である．

（モノイダル圏はその構造的マップ α, λ, ρ がすべて恒等射であるとき「ストリクト」であるということを思い出されたい.）

証明 コヒーレンス定理は語の間の一意的な「カノニカル」マップを生ずる．ゆえに証明のプランは，与えられた圏 M を M の要素の形式的な積の繰り返し（ただし括弧の組はすべて先頭から始まる）からなるさらに大きなストリクトモノイダル圏 S に埋め込むというものである．

S は M の要素により生成される自由モノイドとなる．特に，S の対象 s を空文字列 $\varnothing$ を含むすべての有限列 $s = [b_1, \ldots, b_k]$ に取る．すると文字列 s と t の積 $s \square t$ は文字列の連結 $s \cdot t$ により定義される．この積は結合的であるので，S の結合律射 α は恒等射とすることができる．同様に，空文字列 $\varnothing$ はこの積の単位元として働くので，S のマップ ρ と λ も共に恒等射とすることができる．これらの一致から S は単位元を持つ結合的モノイドである．しかしまだモノイダル圏ではない．

さて，S における文字列上のマップ $F: S \to M$ を次のようにおくことで定義しよう．

$$\begin{aligned} F(\varnothing) &= e\ , \\ F(s) = F[b_1, \ldots, b_k] &= (\ldots(b_1 \square b_2) \square b_3) \ldots) \square b_k)\ . \end{aligned} \tag{1}$$

ここで右辺のすべての括弧の組は先頭から始まる．さて，S における文字列 s と t の間の射 $s \to t$ を，対応する M の対象の間の射そのもの

$$F(s) \to F(t) \tag{1'}$$

で定義しよう．合成も M とちょうど同じように取る．この決め方は明らかに

S を圏にする．このとき連結積 $s \cdot u$ は，射 $f : s \to t$ と $g : u \to v$ の対応する積 $f \cdot g$ に拡張できる．ここで u と v は，s と t と同様に M の対象からなる有限な文字列である．特に，これは $f \cdot g$ を M における次の合成として定義することを意味する．

$$F(s \cdot u) \to F(s)\Box F(u) \xrightarrow{f\Box g} F(t)\Box F(v) \to F(t \cdot v)$$

ここで外側の二つの射は M のカノニカルマップである．文字列のマップ $h : w \to y$ を加えた三つ組の積については，この定義の繰り返しによりカノニカルマップの合成として $(f \cdot g) \cdot h$ が与えられる．よってこれもカノニカルになる．このときモノイダル圏のコヒーレンス定理は，射のこの積 $f \cdot g$ がストリクトに結合的であることを示している．ゆえに S はストリクトモノイダル圏である．さらに，F_0 を恒等射 $e \to e$ とし $F_2(s,t)$ を一意的なカノニカルマップ（すべての括弧を先頭に移動する）

$$F_2(s,t) : F(s)\Box F(t) \to F(s,t) \tag{2}$$

とするとき，F はストロングモノイダル函手である．この定義を用いると，第 2 節のモノイダル函手についての要請 (3) と (4) はモノイダル圏 M についてのコヒーレンス定理から従う．

$G(b) = [b]$ となる逆方向のストロングモノイダル函手 $G : M \to S$ は，M の b, c について，$G(b) \cdot G(c) = [b][c] = [b,c]$ に注意することにより，そして次のようにおくことにより定義される．

$$\begin{aligned} G(b) = [b], \quad G(f) = f\ , \\ G_0 = 1 : \varnothing \to [e]\ , \\ G_2(b,c) = 1 : [b,c] \to [b\Box c]\ . \end{aligned} \tag{3}$$

ここで最後のマップが 1 であるのは，上の定義 (1) により文字列のマップ $[b,c] \to [b\Box c]$ がちょうど M のマップ $b\Box c \to b\Box c$ となるからである．このとき，G について第 2 節の条件 (3), (4) が従う．(3) の場合，マップ $G_2\Box 1$ が

$$\begin{array}{ccc} (G(a) \cdot G(b)) \cdot G(c) & \xrightarrow{G_2\Box 1} & G(a\Box b) \cdot G(c)\ , \\ [a,b,c] & \longmapsto & [a\Box b, c] \end{array}$$

となることに注意されたい．それゆえ，S のマップの定義 (1) より S におけるマップとして M におけるマップ $\alpha: a\Box(b\Box c) \to (a\Box b)\Box c$ がなければならないが，これが第 2 節 (3) の下部のマップ $G(\alpha)$ と合致し，一方 $\alpha' = 1$ が上部のマップである．[するとコヒーレンス定理より可換になる．(4) も同様である.] 合成函手 $FG: M \to M$ は恒等函手であり，合成函手 GF は恒等函手と自然同型である．ゆえにモノイダル圏 M は実際に，ストリクトなモノイダル圏 S と（モノイダル函手により）圏論的に同値であり，これが主張であった． □

逆に，この定理の結論において与えられた同値性は，容易な帰結としてコヒーレンス定理をもたらすことになる．

定理 2 モノイダル圏 M がストロングモノイダル函手 $G: M \to S$ によりストリクトモノイダル圏 S と同値であれば，M のテンソル積 □ の結合律についてコヒーレンスが成り立つ．

証明 v と w を二つの k 文字のテンソル語とし，θ と $\theta': v \to w$ をそれらに対応する函手の間の二つの自然変換であって両方とも M における結合律変換 α の組合せとして構築されているものとする．さて，第 2 節 (7) のように G_2 と G_0 から構築された自然変換 G_v と G_w を使おう．第 2 節 (8) のように，図式

$$\begin{array}{ccc} v(Ga_1,\ldots,Ga_n) & \xrightarrow{\theta_s} & w(Ga_1,\ldots,Ga_n) \\ \downarrow{\scriptstyle G_v} & & \downarrow{\scriptstyle G_w} \\ Gv(a_1,\ldots,a_n) & \xrightarrow{G\theta_m} & Gw(a_1,\ldots,a_n) \end{array}$$

が可換になり，θ' についての対応する図式も同様に可換となる．ここで θ_s は $\theta(Ga_1,\ldots,Ga_n)$ の略記であり，θ_m は $\theta(a_1,\ldots,a_n)$ の略記である．しかし，モノイダル圏 S は $G: M \to S$ を伴うのでストリクトであり，θ と θ' は共に α から構築されるので，S では $\theta = \theta'$ となる．このとき，θ と θ' についての上の図式を比較すると，G_v と G_w は同型射であることがわかっているので，$G\theta_m = G\theta'_m$ であることがわかる．しかし G は圏の同値なので，$FG \cong 1$ となる逆向きの函手 $F: S \to M$ も存在する．ところが $FG\theta_m = FG\theta'_m$ が得

られる．$FG \cong 1$ によって，このことから M において $\theta = \theta'$ が従う．言い換えると，結合律についてのコヒーレンスは（ρ や λ と同様に）M で成り立ち，これが主張であった． □

演習問題

1. 任意の圏 C について，函手圏 C^C は合成をテンソル積とし 1_C を単位元とするとストリクトモノイダル圏であることを示せ．
2. 演習問題 1 で $C = M$ がモノイダル圏であれば，ストロングモノイダル函手 $(T, T_2, T_0) : M \to M^M$ で，M の a, b, c について

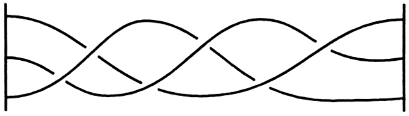
$$T(a) = a\Box - \ ,$$
$$T_2(a,b)_c = \alpha_{a,b,c} : a\Box(b\Box c) \to (a\Box b)\Box c\ ,$$
$$(T_0)a = \lambda(a)^{-1} : a \to e\Box a\ .$$

を満たすものが存在することを示せ．特にこのモノイダル函手 T についての［第 2 節の］条件 (3), (4) が，第 VII 章第 1 節のモノイダル圏の定義における条件 (5), (7), (9) となっていたことに注意されたい．
3. 上の結果を用いて，このコヒーレンス定理とは独立に，定理 1 の別証を与えよ．上の定理 2 にあるように，これはコヒーレンスの独立した証明を与えることに注意されたい．

4　組み紐群 B_n と組み紐圏

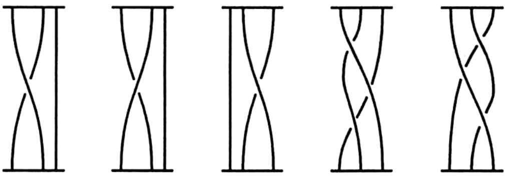
ここで，約束しておいた実際の組み紐 (braid) と，結果として得られる組み紐の圏を導入しよう．

以下の図のような三つの紐からなる組み紐は，紐を切ったり結んだりすることなく空間で互いによじり合わせることにより作られる．



このような組み紐は，一つ目の紐のセットの右端に順に二つ目の紐のセット

の左端をくっつけることにより，もう一つの組み紐との積を取ることができる．二つの組み紐は，紐を横断したり切断したりすることなく一つの組み紐からもう一つの組み紐へと連続的に変形できるとき，等しいと言う．ここで三つの紐からなるラベル付きの組み紐の例を，逆や二つの積も含め，いくつか挙げておく．



最後の図式から一つ前の図式への自明な変形は次の同値性を示している．

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \ . \tag{1}$$

これらの組み紐の積は明らかに結合的であり，単位元（三本のよじられていない紐）と逆元を持つ．このことはアルティン組み紐群 (Artin braid group) B_3 の定義を示すのに役立てることができる．これは σ_1 と σ_2 から関係 (1) にのみ従って生成される．対応する記述により n 本の紐からなる組み紐群 (braid group) B_n が生み出される．

より形式的には，この組み紐群 B_n は適切な空間 T_n，すなわち相異なる n 点の組からなる空間の基本群として定義することができる．実際，P をユークリッド平面とし，空間 T_n を P の相異なる n 点からなる組すべての集合に自明な位相を入れたものとする．すると，アルティン組み紐群 B_n はこの空間 T_n の基本群として形式的に定義することができる．

組み紐群 B_n は明らかに $n-1$ 組み紐 σ_i により生成することができる．ここで σ_i は i 番目の紐を $(i+1)$ 番目の紐の下から 1 回だけよじる．その逆 σ_i^{-1} は，$\sigma_1\sigma_2\sigma_1$ から $\sigma_2\sigma_1\sigma_2$ への変形の示唆と共に上で示されている．実際，B_n を定義するこれらの生成元 σ_i の関係は以下の通りである．

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}\ ,\quad \text{すべての}\ i = 1, \ldots, n-1\ \text{について}\ , \tag{2}$$

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i\ ,\quad |i-j| \neq 1\ . \tag{3}$$

組み紐群 B_2 は単なる（単一の）生成元 σ_1 上の無限巡回群である．組み紐群 B_1 は恒等元のみからなる．

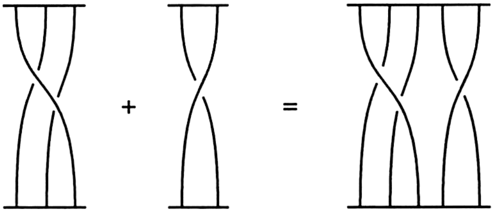
n 本の紐からなる各組み紐は n 個の端点の置換を決定し，よって n 文字上の対称群 S_n の上への準同型 $B_n \to S_n$ を決定する．S_n は文字 i と $i+1$ の交換である $n-1$ 個の互換 $\tau_i = (i, i+1)$ により生成されること，および S_n はこれらの生成元と次の関係により定義されることを思い出そう．

$$\tau_i^2 = 1\ ,\quad \tau_i\tau_j = \tau_j\tau_i\ ,\quad |i-j| \neq 1\ , \tag{4}$$

$$\tau_i\tau_{i+1}\tau_i = \tau_{i+1}\tau_i\tau_{i+1}\ ,\quad i = 1, \ldots, n-1\ . \tag{5}$$

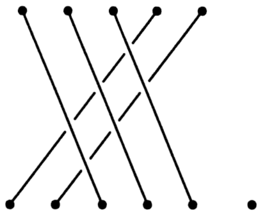
これは再び B_n から S_n の上への準同型 $\sigma_i \mapsto \tau_i$ を示している．

すべての組み紐群を結び付けて組み紐圏 (braid category) B を形作ることができる．その対象はすべての自然数 $n = 0, 1, 2, \ldots$（ゼロを含む）であり，射は組み紐 $n \to n$ である．$n \neq m$ について射 $n \to m$ は存在せず，あと恒等射 $\varnothing \to \varnothing$ だけは存在する．これはモノイダル圏を定義し，ボックス積 (box product) $\square : B \times B \to B$ は「加法」$\square = +$ により与えられる．ここで二つの対象（自然数）m と n の和は通常の数の和であり，組み紐の加法は組み紐を隣り合わせに並べるという演算である．

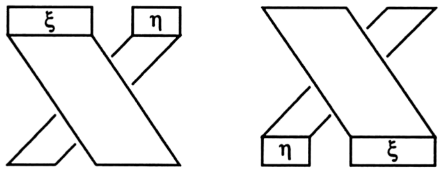


この演算は明らかに（ストリクトに）結合的であり $\varnothing$ 上の空の組み紐を単位元として持つ．よって，組み紐圏 B は $+$ のもとでストリクトモノイダル圏である．これはほとんど対称モノイダル圏である．対象の加法 $m+n$ は可換であり，変換 $\gamma_{m,n} : m+n \to n+m$ を（$m=3$, $n=2$ のときの）以下の

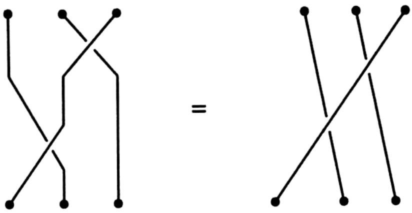
図のように m 本の紐が n 本の紐を横切ることにより定義することができる.



この γ は m と n において自然である. 以下の模式的な図式における組み紐 $\xi : m \to m$ および $\eta : n \to n$ について, このことは図から理解できる (Joyal-Street [1993]).



対称性の要求 $\gamma^2 = 1$ は満たさないが, 以下の図式で示唆されるように [第1節 (7) の] 六角図式は両方とも当てはまる (ここで結合律は自明なので見えない).



よじられた紐による組み紐の実現は, 理論物理学における紐理論に組み紐付きの圏を用いることを直接的に示唆している.

5　組み紐付きコヒーレンス

第 1 節で見たように，対称モノイダル圏ではコヒーレンスが成り立つ．すなわち，結合律射 α と可換律射 γ のみを含む形式的な図式はすべて可換である．これは組み紐付きモノイダル圏 B には全く当てはまらない．B の二つの対象 a と b が与えられたとき，$a \Box b$ には次のように無限個の「カノニカルな」自己同型が存在するかもしれない．

$$1, \gamma^2, \gamma^4, \ldots, \gamma^{-2}, \gamma^{-4}, \ldots : a \Box b \to a \Box b\ . \tag{1}$$

このような仕方で組み紐群 B_2 の部分群は $a \Box b$ に作用する．その結果，γ を含むすべての図式が可換になるとは限らない．

一般的な状況も同様であり，以下の Joyal-Street [1993] の「コヒーレンス」定理により記述される．

定理 1　B が組み紐圏であり，M が M_0 を基礎の（通常の）圏とする組み紐付きモノイダル圏であるとき，圏の同値

$$\mathrm{hom}_{\mathrm{BMC}}(B, M) \approx M_0 \tag{2}$$

が存在する．ここで $\mathrm{hom}_{\mathrm{BMC}}$ はストロング組み紐付きモノイダル函手 $F : B \to M$ の圏を意味する．同値 (2) は，組み紐圏 B の対象 1 における各函手 $F : B \to M$ の評価 (evaluation) により与えられる．

証明　第 3 節定理 1 により，モノイダル圏 M はストリクトモノイダル圏 S とストロングに同値である．M の組み上げ γ はこの同値によって直ちに S の組み上げに変換され，同値 $M \to S$ は組み紐付き圏のストロングモルフィズムとなる．それゆえ M をストリクトモノイダル圏 S で置き換えた定理を証明すれば十分である．そこで圏の同型

$$\mathrm{hom}_{\mathrm{BMS}}(B, S) \cong S_0 \tag{3}$$

が存在することを示そう．ここで $\mathrm{hom}_{\mathrm{BMS}}$ はストリクト組み紐付きモノイダル函手 F［の圏］を意味しており，同型は再び $1 \in B$ における評価により与えられる．対応 (3) はこのような各函手 F を S の対象 $F(1)$ に写す．逆に，S

の対象 a が与えられたとき，我々は $F(1)=a$ となるストリクト組み紐付きモノイダル函手 $F=F_a:B\to S$ を定義したい．F はストリクトになることから積を保存しなければならないので，$F(n)=a^n$ とおく．組み紐圏 B でのマップ $n\to n$ は S のマップ $a^n\to a^n$ に写されなければならない．B におけるこれらのマップ $n\to n$ はちょうど n 番目の組み紐群 B_n の要素であり，標準的なマップ σ_i, $i=1,\ldots,n-1$ により生成される．特に $\sigma:2\to 2$ は S の

$$F(\sigma)=\gamma_{a,a}:a^2\to a^2$$

に写されなければならない．B ではマップ σ_i（紐 i を紐 $i+1$ の下からよじられる）は和（すなわち □ 積）

$$\sigma_i=1_{i-1}+\sigma+1_{n-i-1},\quad n\to n$$

として書くことができる．それゆえ

$$F(\sigma_i)=1_{a^{i-1}}+\gamma_{a,a}+1_{a^{n-i-1}},\quad a^n\to a^n$$

とおかなければならない（のでそのようにしよう）．次に F が組み紐群 B_n の定義関係を保存することをチェックしなければならない．関係

$$\sigma_i\sigma_j=\sigma_j\sigma_i,\quad |i-j|>1$$

はすぐにわかるが，関係

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i=\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$$

は γ の二つの可換六角図式から従う．これは $i=1$ の場合については第 1 節の図式 (11) に図示されている．

モノイダル函手 $F=(F,F_2,F_0)$ の定義を完結するためには，適切なマップ F_0 および m と n において自然なマップ

$$F_2(m,n):F(m)\square F(n)\to F(m+n)$$

も作らなければならない．これは選ばれた $a=F(1)$ についてマップ

$$a^m\square a^n\to a^{m+n}$$

でなければならない．しかし，組み紐 $m\to m$ と $n\to n$ の和は単純にこれ

らの組み紐を隣り合わせにおいたものであるので，このマップを恒等射とすることができる．

さらにマップ $F_0 : e' \to Fe$ も必要である．ここで e' は S の単位対象であり，$e = 0$ より $F(e) = e'$ である．よって F_0 を恒等射とすることができる．これらの選択により，F は実際にストリクトである．

最後に，(3) の演算「1 で評価する」が圏の同値であることを，それが充満かつ忠実であることを示すことにより示す．実際，二つのストリクトモノイダル函手 $F, G : B \to S$ と S_0 におけるそれらの（1 での評価による）像の間の S_0 におけるマップ $f : F(1) \to G(1)$ が与えられたとき，対象 1 で θ が与えられたマップ f となるような自然変換 $\theta : F \to G$ を得たい．しかし B では対象 n は対象 1 の n 重 □ 積であり，S はストリクトモノイダル圏であるので □ による n 乗を持つ．n 要素の □-語 w について，ストリクトモノイダル函手 F は同型 $F_w : F(1)^n \to F(n)$ を生み出す．同様に，この語の n 引数すべてが a と等しいとき，B や S において a の n 乗を生み出す．ゆえに，$\theta(1) = f$ となるような求める自然変換 $\theta : F \to G$ は以下の図式を可換にしなければならない．

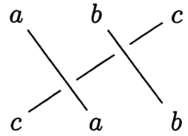
$$\begin{array}{ccc} F(1)^n & \xrightarrow{\ f^n\ } & G(1)^n \\ {\scriptstyle \cong}\big\downarrow{\scriptstyle F_w} & & \big\downarrow{\scriptstyle G_w} \\ F(n) & \xrightarrow[\ \theta_n\ ]{} & G(n) \end{array}$$

よって θ_n はこれにより $G_w f^n F_w^{-1}$ と定義されなければならない．F_w と G_w の性質から，このように定義された θ が自然であることが従う．　□

注．この証明はプレプリント [1986] における Joyal-Street の議論に従っている．これはその後出版された論文 [1993] には導入されなかった．

この結果はコヒーレンス定理であるが，それは普通の意味でではない．これは，基本マップ α, λ, ρ からなるすべての図式が可換であることを主張するものではなく，これらのマップのすべての合成およびこれらからテンソル積を繰り返すことにより生成されるすべての自己準同型を記述するのに役立つものである．これらのマップは，たとえば以下のようにそれぞれ基礎となる組み紐を持っている．

$$\begin{array}{c}(a\Box b)\Box c\\ \big\downarrow \gamma\\ c\Box(a\Box b)\end{array}$$



この組み紐は自然変換としてのこのマップの変数の組合せを与える．その結果は，非形式的には次のように述べることができる（Joyal-Street [1993]）．$\alpha, \lambda, \rho, \gamma$ からなる二つの合成は，それらが同じ基礎となる組み紐を持つとき等しい．

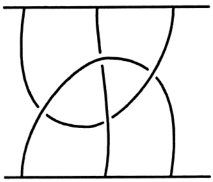
結果として得られるコヒーレンス定理は次のように述べることができる．

定理 2 組み紐付きモノイダル圏 M における n 項の積に作用するカノニカルマップの合成はそれぞれ組み上げ（組み紐群の元）を誘導する．二つのこのような合成は，B_n の同じ要素を与えるとき，そのときに限り等しい． □

6 展望

組み紐付き圏の研究は，数理物理学における量子場の理論の一部の研究と同様に，他の数学のトピックと多くの結び付きを持つ．これらの結び付きの内のいくつかは，物理学における紐理論に現れている．そこでは互いの周りを行き来する素粒子の経路が組み紐を形成しうる —— そして，素粒子の衝突と分離を表現するファインマンダイアグラムの場合と同様に，二つの紐がくっついたり離れたりすることでさらに多くのことが起こる．ここでは，組み紐を（動く点によるのではなく，たとえば振動する円形の紐のように，別の意味での動く「紐」による）経路から合成されたものと考える．すると（上で紐と呼ばれた）我々の経路は（位相的に）円形の横断面を持つチューブによって置き換えられる．すると有限個のこういったチューブの配列は組み紐付き圏のモルフィズム（経路）と見なすことができる．これらのチューブにはそれぞれ共形構造が与えられ，ファインマンダイアグラムの場合と同様に，同じことが衝突にも適用される（Mac Lane [1991] を参照されたい）．これらの構成はコンパクト位相群の淡中双対性 (Tannaka duality) においても一定の役割を果たす（Doplicher-Roberts [1989] を参照されたい）．

異なる方向として，我々の組み紐の一つにおける 1 次元の紐をリボンに置き換えてもよく，これらのリボンには時計方向や反時計方向に 1 回以上の捻りを加えることができる（Shum [1994] のリボン圏を参照されたい）．結び目理論（Kauffman [1991, 1993]）そしてやはり物理学との広汎な結び付きが存在する．組み紐の紐は「絡み目 (tangle)」に置き換えてもよい．絡み目では，たとえば次の図式に示されているように，紐は下辺の直線からスタートして様々な他の紐の周りに巻き付いてからスタートした直線の異なる点に戻ってくることができる．



最後に，ホップ代数 (Hopf algebra) および量子群（これは一般化されたホップ代数である）との衝撃的な結び付きがある．Schnider と Sternberg によるモノグラフ [1993] に広汎な文献一覧がある．

第XII章　圏の中の構造

この章において，いくつかの概念的発展について考察する．まず，周囲圏の中の図式によって記述される「内部」圏のアイデアから始める．それから圏の中の合成可能な射による列 —— それらの列は圏の「脈体 (nerve)」をなし，それは結果的にはある単体集合になる —— の研究に話を進めていく．

この点から，2-圏のような「高次元の」圏を考察していく．2-圏は対象，射，射の間の 2-セル，その他を持つ．さらに，3-セル，それ以上を持つ圏へと話を進めていく．

1　内部圏

この節では，ある**周囲圏** (ambient category) E の中で議論を進める．この圏は有限完備である，つまり，すべての有限積，引き戻し，および終対象を持つとする．序章で既に見てきたように，モノイド，群，グラフ，その他の類の代数的な対象を E の中で定義することができる．このパターンに従えば，E の中である圏を定義できる —— これを E における**圏対象** (category object) または E における**内部圏** (internal category) と呼ぶ．

そのような内部圏 $C = (C_0, C_1, i, d_0, d_1, \gamma)$ は，それぞれ「対象からなる対象」および「射からなる対象」と呼ばれる E の二つの対象 C_0 および C_1，さらに E における四つのマップ

$$i : C_0 \to C_1, \qquad d_0, d_1 : C_1 \to C_0, \qquad \gamma : C_1 \times_{C_0} C_1 \to C_1 \qquad (1)$$

によって構成されており，i は恒等射，d_0 はドメイン，d_1 はコドメイン，そして γ は合成と呼ばれる．ただし，γ は以下の引き戻し $C_1 \times_{C_0} C_1$

$$\begin{array}{ccc} C_1 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{\pi_2} & C_1 \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_1} \\ C_1 & \xrightarrow{d_0} & C_0 \end{array} \tag{2}$$

の上で定義される．それゆえ，($E = \mathbf{Set}$ のときは) $C_1 \times_{C_0} C_1$ は合成可能な射のすべての二つ組からなる対象に他ならない．これらの四つのマップ (1) は以下の四つの可換性に関する条件に従うものであり，それらの条件は圏の通常の公理をそのまま表している．すなわち，

$$d_0 i = 1 = d_1 i : C_0 \to C_0 \tag{3}$$

は恒等射のドメインとコドメインを特定しており，それから

$$\begin{array}{ccccc} C_0 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{i \times 1} & C_1 \times_{C_0} C_1 & \xleftarrow{1 \times i} & C_1 \times_{C_0} C_0 \\ {\scriptstyle \pi_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} \\ C_1 & = & C_1 & = & C_1 \end{array} \tag{4}$$

は恒等射が合成 γ についてそれらしく振る舞うことを主張しており，それから

$$\begin{array}{ccccc} C_1 & \xleftarrow{\pi_1} & C_1 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{\pi_2} & C_1 \\ {\scriptstyle d_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \downarrow{\scriptstyle d_0} \\ C_0 & \xleftarrow{d_1} & C_1 & \xrightarrow{d_0} & C_0 \end{array} \tag{5}$$

は合成された射のドメインとコドメインを特定しており，さらに

$$\begin{array}{ccc} C_1 \times_{C_0} C_1 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{\gamma \times 1} & C_1 \times_{C_0} C_1 \\ {\scriptstyle 1 \times \gamma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} \\ C_1 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{\gamma} & C_1 \end{array} \tag{6}$$

は（明らかに結合律を満たす）三項の引き戻し $C_1 \times_{C_0} C_1 \times_{C_0} C_1$ を用いて合成に関する結合律を表している．この定義は以前に第 II 章第 7 節の (3) の中で与えられたものと本質的に等しい．

これらの図式は圏の公理を表しているので，**Set** における圏対象は従来の小圏に他ならない．また，**Grp** における圏対象は，対象の集合 C_0 および射の集合 C_1 が両方とも群であり，すべての構造的マップ (structural map) i, d_0, d_1, γ が群の準同型となるような圏である．このことは i と d_0 の場合では図式

$$\begin{array}{ccc} C_0\times C_0 & \xrightarrow{m_0} & C_0 \\ \downarrow{\scriptstyle i\times i} & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ C_1\times C_1 & \xrightarrow{m_1} & C_1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C_1\times C_1 & \xrightarrow{m_1} & C_1 \\ \downarrow{\scriptstyle d_0\times d_0} & & \downarrow{\scriptstyle d_0} \\ C_0\times C_0 & \xrightarrow{m_0} & C_0 \end{array}$$

が可換になることを意味する．ただし m_0 および m_1 は群 C_0 および C_1 における乗法演算である．しかし $C_0\times C_0$ は $C_1\times C_1$ を伴って積圏 $C\times C$ を与えるので，これらの図式は群の乗法演算 m_0 および m_1 が一緒になって圏のモルフィズム，つまり結合律を満たし逆（元）も持つような函手 $m : C\times C\to C$ を与えることも意味している．よって，与えられた **Grp** における圏対象は **Cat** の中の群構造を持つ対象と等しい．

一般的に代数的構造どうしの同様の交換が成り立つ．つまり，Y 対象からなる圏における X 対象の圏はすべての X 対象からなる圏における Y 対象の圏でもある．

共通の周囲圏 E における二つの内部圏 C および D の間の**内部函手** (internal functor) は，E のマップ $f_0 : C_0\to D_0$ および $f_1 : C_1\to D_1$ による二つ組で,「対象」および「射」関数として自然に得られる図式

$$\begin{array}{ccc} C_1\times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{f_1\times f_1} & D_1\times_{D_0} D_1 \\ \downarrow{\scriptstyle \gamma_C} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_D} \\ C_1 & \xrightarrow{f_1} & D_1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} C_1 & \overset{d_0}{\underset{d_1}{\rightrightarrows}} & C_0 & \xrightarrow{i} & C_1 \\ \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \downarrow{\scriptstyle f_1} \\ D_1 & \overset{d_0}{\underset{d_1}{\rightrightarrows}} & D_0 & \xrightarrow{i} & D_1 \end{array} \tag{7}$$

を可換にするようなものとして定義される．同様に，C から D への二つの内部函手どうしの内部自然変換も容易に記述することができる．

しかしながら，これらの内部函手 $C\to D$ は C から別の内部圏 D へ行くのであって，C からユニバース E へ行くのではない．実際，ユニバースに相当する内部圏は［一般には］存在しない．よって，**Set** における内部函手は

(しばしば考えられる hom 函手のような) 函手 $H : C \to \mathbf{Set}$ を含まない．このことから，そのような函手 H の概念を定式化し直す必要が生じる．対象の集合 C_0 は小さく，また集合の圏は余完備なので，対象関数 $H_0 : C_0 \to \mathbf{Set}$ を集合の余積および自然に定義される C_0 への射影

$$\pi : H_0 = \coprod_{c \in C_0} H_0 c \to C_0 \tag{8}$$

に置き換えることができる[1]．それから射 $f : c \to c'$ の作用を組み合わせることによって「作用」マップ

$$C_1 \times_{C_0} H_0 \to H_0$$

が得られる．

よって，E における内部圏 C が与えられたとき，$\pi : H_0 \to C_0$ や $d_0 : C_1 \to C_0$ のような C_0「上の」E における対象を考えることに行き着く．そこで，E における左 C_0-対象 (left C_0-object) が作用マップ

$$\mu : C_1 \times_{C_0} H \to H \tag{9}$$

を伴う C_0 上の対象 $\pi : H \to C_0$ として定義される．ここで，この引き戻しに関して，C_1 はドメインマップ $d_0 : C_1 \to C_0$ を通じて得られる C_0 上の対象である．この作用マップ μ は，以下の図式が可換になるという意味で,「C_0 上の」マップとなる．ここで p_1 は第一因子への射影である．

$$\begin{array}{ccc} C_1 \times_{C_0} H & \xrightarrow{\ \mu\ } & H \\ \downarrow{\scriptstyle p_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ C_1 & \xrightarrow{\ d_1\ } & C_0 \end{array} \tag{10}$$

これは単位元規則と結合規則を次のように満たすという点で，群の集合への作用と同様のものと言うこともできる．

1　[訳注] 各 $x \in \coprod_{c \in C_0} H_0 c$ に対して，$x \in H_0 c$ を満たす一意的な c を $\pi(x)$ とすることによって π を定義する．

$$\begin{array}{ccc} C_0 \times_{C_0} H & \xrightarrow{i\times 1} & C_1 \times_{C_0} H \\ & \searrow^{p_2} & \downarrow{\mu} \\ & & H \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} C_1 \times_{C_0} C_1 \times_{C_0} H & \xrightarrow{1\times\mu} & C_1 \times_{C_0} H \\ \downarrow{\gamma\times 1} & & \downarrow{\mu} \\ C_1 \times_{C_0} H & \xrightarrow{\mu} & H \end{array} \tag{11}$$

このような左 C-対象は内部圏 C 上の「内部図式 (internal diagram)」，あるいは内部基底値函手 (internal base-valued functor) (Borceux) とも呼ばれる．重要なポイントとして，$E = \mathbf{Set}$ のとき，これはちょうど **Set** における圏から周囲圏 **Set** への普通の函手に該当することに注意されたい．

さらに，このような（左）C-対象のモルフィズム $H \to K$ は E 上のモルフィズム $\phi\colon H \to K$ で関係のある構造を保つようなもの，つまり，このモルフィズム ϕ による以下の図式が共に可換になるようなものに他ならない．

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\phi} & K \\ \downarrow{\pi} & & \downarrow{\pi} \\ C_0 & = & C_0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C_1 \times_{C_0} H & \xrightarrow{1\times\phi} & C_1 \times_{C_0} K \\ \downarrow{\mu} & & \downarrow{\mu} \\ H & \xrightarrow{\phi} & K \end{array} \tag{12}$$

このことによって，普通の集合値函手 H および K に対して，ϕ はちょうど自然変換になる．実際，第一の図式は ϕ が各 $H(c)$ を $K(c)$ に写すことを示しているし，第二の図式は ϕ が（自然性を満たすために要求される）合成と可換であることを示している．

第 8 節で，群における圏対象を研究する．

2　圏の脈体

（**Set** の中の）圏 C が与えられるとき，引き戻し $C_2 = C_1 \times_{C_0} C_1$ は，先に用いたように，合成可能な C の射の組でできている．同様に，第 II 章第 7

節の (5) にあるような，n 個の射からなる合成可能な列

$$\bullet \xleftarrow{f_1} \bullet \xleftarrow{f_2} \cdots \xleftarrow{f_n} \bullet$$

で

$$d_0 f_1 = d_1 f_2,\ \ldots,\ d_0 f_{n-1} = d_1 f_n \tag{1}$$

を満たすものを考える．それらは引き戻しの繰り返し

$$C_n = C_1 \times_{C_0} C_1 \times_{C_0} \cdots \times_{C_0} C_1 \qquad (n \text{ 個の因子}) \tag{2}$$

の元である．C_0 を伴い，集合からなるこの列

$$C_0,\ C_1, \ldots, C_n, \ldots$$

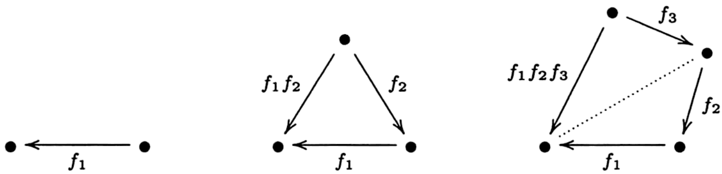
は（第 VII 章第 5 節で定義されるのと同じ意味で）実際に単体集合をなす．$n = 1$ については，既に「面作用素」$d_0, d_1 : C_1 \to C_0$ が存在している．$n > 1$ について，$i = 0, \ldots, n$ に対する「面作用素」$d_i : C_n \to C_{n-1}$ が，

$$\begin{aligned} &d_0(f_1, \ldots, f_n) = (f_2, \ldots, f_n), \\ &d_j(f_1, \ldots, f_n) = (f_1, \ldots, f_j f_{j+1}, \ldots, f_n), \qquad j = 1, \ldots, n-1, \\ &d_n(f_1, \ldots, f_n) = (f_1, \ldots, f_{n-1}) \end{aligned} \tag{3}$$

となるように，削除あるいは隣接した射の合成によって定義され，一方で退化作用素 s_j が，

$$\begin{aligned} &s_0(f_1, \ldots, f_n) = (i_{d_1 f_1}, f_1, f_2, \ldots, f_n), \\ &s_j(f_1, \ldots, f_n) = (f_1, \ldots, f_j, i_{d_0 f_j}, f_{j+1}, \ldots, f_n), \quad j = 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{4}$$

となるように，適当な場所に適当な恒等マップ $i_{d_k f_j}$ を挿入することにより定義される．これらの結果は再び射からなる合成可能な列となる．第 VII 章第 5 節の (11) で説明したように，面作用素と退化作用素について要求される等式はすぐに確かめられる．単体の辺に射 f_i を以下の図のようにおくことにより，幾何学的な意味が説明できる．これによって合成が自然に考えられる．



E における内部圏の脈体も同様に E における単体対象である.

演習問題

1. 脈体に関して先に定義した作用素について面作用と退化作用の等式が成り立つことを確かめよ.

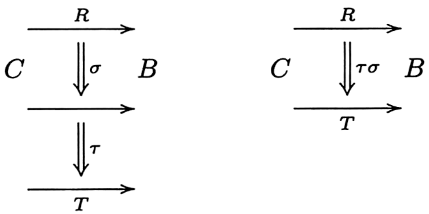
3 2-圏

2-圏は，2-セルまたは二つの異なるが可換である圏論的な方法によって合成できるような「マップ」の体系である.

最初の例（第 II 章第 5 節を参照されたい）はそのような体系における自然変換が「マップ」となるものである．三つの函手

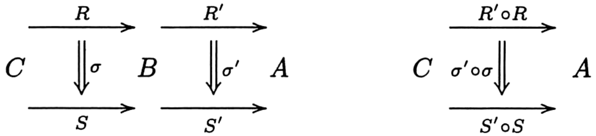
$$R, S, T : C \to B$$

および自然変換 $\sigma : R \dot{\to} S$ および $\tau : S \dot{\to} T$ が与えられたとき，第 II 章第 4 節において,「垂直」合成された自然変換 $\tau \cdot \sigma : R \to T$ を C の任意の対象 c について $(\tau \cdot \sigma)(c) = \tau c \circ \sigma c$ とすることにより定義した．これは最初の自然変換 σ に二番目のものが続けられてできたものである.



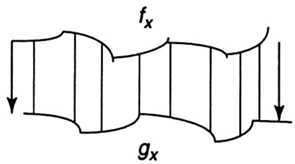
しかし自然変換の水平合成も存在する．これは以下の図式のように C の任意の対象 c について $(\sigma' \circ \sigma)c = \sigma' Sc \circ R' \sigma c$ とすることによって函手の合成を

適合させる（第 II 章第 5 節）．



両方の合成は結合律を満たし，お互いが他方と可換である（第 II 章第 5 節の定理 1）．

同様に，連続写像どうしのホモトピーの合成にも二つの可換な方法が存在する．位相幾何学において，空間 X から空間 Y への連続写像 f および g の間のホモトピー $\theta : f \sim g$ は，写像 f の g への連続変形，



つまり連続写像 $\theta : X \times I \to Y$ であることを思い出そう．ここで I は単位区間で，X の各点 x について始点 0 および終点 1 において等式 $\theta(x, 0) = f(x)$ および $\theta(x, 1) = g(x)$ が成り立つ．二番目のホモトピー $\varphi = g \sim h$ は θ との垂直合成 $\varphi \bullet \theta : f \sim h$ を持つ（以下を参照されたい）．また，写像 $f', g' : Y \to Z$ とこれらの間のホモトピー $\theta' : f' \sim g'$ は，合成写像による θ との「水平」合成 $\theta' \circ \theta : f' \circ f \sim g' \circ g$ を持つ．しかしながら，二つのホモトピーの期待される垂直合成 $\varphi \bullet \theta$ で，$0 < t < 1/2$ のときは θ を使い $1/2 < t < 1$ のときは φ を使うようなものは結合律を満たさない．よって，圏論的性質を得るために，2-セルとしてホモトピーからなるホモトピー類を用いる必要があるのだ！　この場合も，水平合成は垂直合成と可換である．

これらの例（や他の例）によって，2-圏の一般的概念が対象，対象間の射，そして射の間の 2-セルからなる構造であると考えられるようになる．ここで 2-セルは「水平」および「垂直」という二通りの方法で合成できる．

対象 $a, b, \ldots$ および $f : a \to b$ のような「水平」射を持つ普通の圏から議論

を始める．C 上の 2-圏 Π には，さらに，ドメインが f でコドメインが g となるような 2-セル $\alpha : f \Rightarrow g$ が存在する．ここで f と g は C における，たとえば a から b への，平行な射であり，

$$\alpha : f \Rightarrow g : a \to b \tag{1}$$

と表されたり，あるいは（垂直方向に）

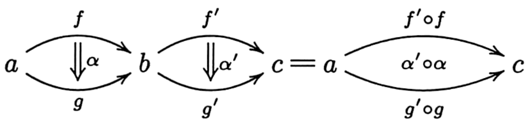


(2)

と描写されたりする．これらの 2-セルは二つの異なる合成を持つ．最初は，

$$\alpha' : f' \Rightarrow g' : b \to c \tag{3}$$

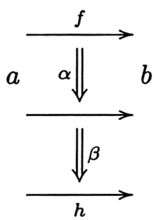
を二番目の 2-セルとすると，ある水平合成された 2-セル $\alpha' \circ \alpha$

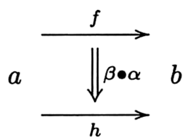


(4)

で（上と下で）与えられる射の合成に適合するものが存在する．2-セルはこの水平合成のもとで圏をなすことが要求される．このことは特に，各対象 b についてある「恒等」2-セル $1 : 1 \Rightarrow 1 : b \to b$ が存在し，この合成に対する両側の恒等射として振る舞うことを意味する．また,「ドメイン」$\alpha \mapsto f$ と「コドメイン」$\alpha \mapsto g$ は共に 2-セルの水平圏 (horizontal category) から射の水平圏への函手である．

さらに，各対象 a, b の組について，a から b への 2-セルは，



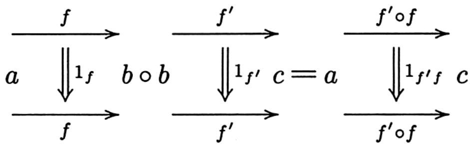
から


(5)

が得られるような「垂直」合成 (vertical composite) のもとでの圏の射にな

る．ここで黒塗りの点は，この垂直合成を表す．この合成に対する垂直恒等 2-セル $1_f : f \Rightarrow f$ もやはり存在する．

二つの追加された公理は水平と垂直を関係付ける．まず，図式

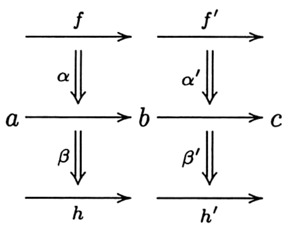


$$1_{f'f} = 1_{f'} \circ 1_f \tag{6}$$

にある通り，二つの垂直恒等セルどうしを水平に合成したもの自身は垂直恒等セルとなることが要求される．次に，一連の 2-セル

$$\begin{aligned} &\alpha : f \Rightarrow g : a \to b, && \alpha' : f' \Rightarrow g' : b \to c, \\ &\beta : g \Rightarrow h : a \to b, && \beta' : g' \Rightarrow h' : b \to c \end{aligned} \tag{7}$$

が与えられたとき，図



(8)

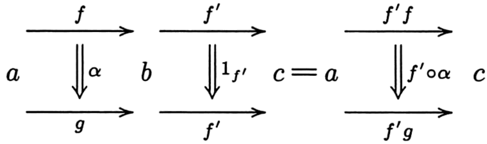
の中で扱われている合成された 2-セルは等式

$$(\beta' \circ \beta) \bullet (\alpha' \circ \alpha) = (\beta' \bullet \alpha') \circ (\beta \bullet \alpha) : f' \circ f \Rightarrow h' \circ h : a \to c \tag{9}$$

を満たさなくてはならない．

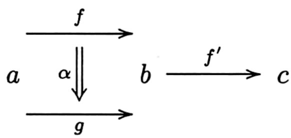
ここで（別の場所でも），黒塗りの点 $\bullet$ は垂直合成のために使われ，小さな丸 $\circ$ は（あるいは単に並べるのは）水平合成に使われる．この公理 (9) は，四つの 2-セル β', β, α', α による列の中の真ん中の二つの引数を交換するため,「中央四者交換 (middle four exchange)」と呼ばれる．

この構造は 2-セルと 1-セルとの水平合成も与える —— 以下の図の $f' \circ \alpha$ のように，2-セルに 1-セルの垂直恒等セルを左右どちらかの側から合成することに他ならない —— ことに注意されたい．



(10)

この図は以下のように（2-セル α 上の「僅差 (whisker)」f' として）描写されることもある．



(11)

この 2-圏の定義は先に挙げられた 2-圏の例を確かに包含している．すなわち，位相空間，連続写像，ホモトピーの類からなる 2-圏や，小圏，函手，自然変換からなる 2-圏 **CAT** である．

対象 a および b 上の垂直圏 (vertical category) を $T(a,b)$ で書き表すと便利である．このとき中央四者交換 (9) と垂直恒等セルに関する規則 (6) が一緒になって水平合成が垂直圏どうしの双函手

$$K_{a,b,c} : T(b,c) \times T(a,b) \to T(a,c) \tag{12}$$

になることを意味する．また，任意の対象 a を恒等射 $1_a : a \to a$ に写す演算 U_a は（一つの対象と一つの射を持つ）終圏 $\mathbf{1}$ からの函手

$$U_a : \mathbf{1} \to T(a,a) \tag{13}$$

となる．

これら二つの演算は垂直 hom 圏 $T(a,b)$ を用いて 2-圏を記述するのに十分である —— その記述は hom 集合による従来の圏の定義（第 I 章第 8 節）に似ている．つまり，2-圏は以下の情報により与えられる．

(i) 対象 a, b, c, ... からなる集合．
(ii) 各対象の順序対 (a,b) に圏 $T(a,b)$ を割り当てる関数．
(iii) 各対象の順序入り三つ組 $\langle a,b,c\rangle$ に対する，合成と呼ばれる函手 (12)．
(iv) 各対象 a に対する，(13) のような函手 U_a．

情報のこれらの要素は合成 (iii) に関する結合律や U_a がこの合成に対する

左および右恒等セルを与えるという条件を満たすことを要求される．

2-圏に関するこの公理系は先に与えたものと同値である．これは hom 集合を用いた圏の定義と非常によく似ている．ここでは hom 対象 $T(a,b)$ を代わりに用いている．これらの対象は単なる集合でなく圏（つまり，圏 **CAT** の対象）である．このとき，これらはすべての（小）圏からなる圏 **CAT** において「豊穣な (enriched)」hom 集合であると言う．その構成の際には **CAT** が積と終対象を持つという事実が用いられる．より一般的には，**CAT** の代わりにモノイダル圏 V を用いて，V において「豊穣な」圏 —— つまり，V の対象となる hom 対象と，上記のような合成や恒等射を持つ圏 —— を調べることはしばしば役に立つ．(第 VII 章第 7 節および第 I 章第 8 節にある Ab-圏についての注意も参照されたい.）Kelly [1982] の研究論文ではそのような豊穣圏に対する体系的な研究がなされている．Dubuc [1970] も参照されたい．

4　2-圏における演算

函手の性質の多くは，それらが **CAT** において展開されてきたように，他の 2-圏でもそのまま引き継がれることになる．例として随伴が挙げられる．つまり，2-圏において，図

$$a \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} b$$

のような，共通の二対象間の二つの 1-セルで方向が互いに逆の f および g が，f を左随伴とし g を右随伴とするような**随伴** (adjoint) であるとは，(「単位元」および「余単位元」と呼ばれる）ある 2-セル η および ε

$$\eta : 1_a \Rightarrow gf : a \to a, \qquad \varepsilon : fg \Rightarrow 1_b : b \to b \tag{1}$$

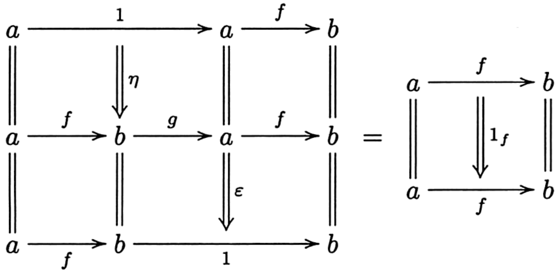
が存在して以下の等式を両方とも満たすことを言う：

$$(\varepsilon f) \bullet (f\eta) = 1_f : f \Rightarrow fgf \Rightarrow f : a \to b\ , \tag{2}$$

$$(g\varepsilon) \bullet (\eta g) = 1_g : g \Rightarrow gfg \Rightarrow g : b \to a\ . \tag{3}$$

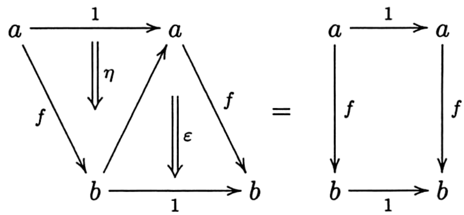
実際，2-圏 **CAT** において，これらの二つの等式は函手間の（通常の）随伴の単位元 η および余単位元 ε に対する二つの三角規則（第 IV 章第 1 節の (9)）

を表していることに他ならない．最初の等式 (2) において，εf は実際には水平合成 $\varepsilon 1_f$ を表すので，この等式は厳密には以下の図のように描写される．



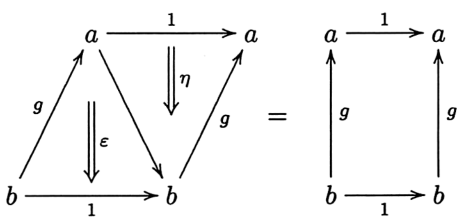
(4)

ここで，図の左側は 2-セルの二つの水平合成の結果を垂直合成して得たものを表す．これは，左下［および右上］の 1_f を省略して，



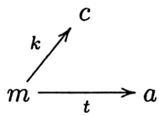
(5)

のように示唆的に描写することができる．同様に，等式 (3) の左辺は以下の垂直合成に関わるものである．



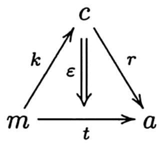
この図は水平合成 $g\varepsilon$ と水平合成 ηg を f に沿って「貼り合わせる (paste)」と g から g への恒等セルが得られることを表している．

全く同じようにして，(右) カン拡張の概念（第 X 章第 3 節）を 2-圏へと転換することができる．このときは，2-圏において対象 m, c, a および射 k, t が以下の構成



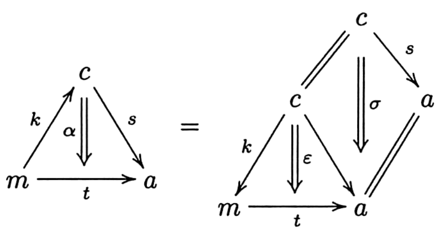
(6)

で与えられたとき，k に沿った t の右カン拡張は射 r および 2-セル $\varepsilon : rk \Rightarrow t$



(7)

で次の性質を満たすものである．他の任意の 2-セル α がある $s : c \to a$ について $\alpha : sk \Rightarrow t$ を満たすとき，α は以下のような一意的な 2-セル σ と ε との合成になる．



(8)

言い換えると，r と ε は，2-セル σ を除いて一意的に決まる，三角図式 (6) の空所を補う普遍的な方法を形成する．もちろん，この構成は実際の函手に対する右カン拡張を記述するために第 X 章第 3 節で既に用いたものに他ならない．

他のすべての代数的な対象と同様に，2-圏どうしのモルフィズムも定義しなくてはならない．それらは 2-函手と呼ばれる．二つの 2-圏 T と U の間の 2-函手 (2-functor)

$$F : T \to U$$

とは，T の対象，射，および 2-セルを U における同じタイプのものへ写す関数からなる三つ組で，すべての圏論的な構造（ドメイン，コドメイン，恒等射，および合成）を保存するものである．G を同じ 2-圏どうしの先のような第二の函手 $G : T \to U$ とすると，2-自然変換 $\theta : F \dot{\to} G$ は T の各対象 a を U の射 $\theta a : Fa \to Ga$ へ写す関数で，T の各 2-セル $\alpha : f \Rightarrow g$ について，（以下に図示された「僅差の」2-セルの間で）等式

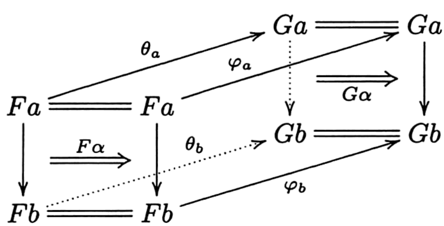
$$Fa \;\underset{Fg}{\overset{Ff}{\Downarrow F\alpha}}\; Fb \xrightarrow{\theta b} Gb = Fa \xrightarrow{\theta a} Ga \;\underset{Gg}{\overset{Gf}{\Downarrow G\alpha}}\; Gb \tag{9}$$

が成り立つようなものである．特に，辺（1-セル）にのみ適用したときは，θ は必然的に，関連する従来の函手 F と G の間の（従来の）自然変換になることを意味する．読者は 2-圏と 2-函手，およびそれらの間の 2-自然変換が，対象と射，およびある 2-圏の 2-セルをなすことを確かめられるだろう！ この圏はしばしば **2-Cat** と呼ばれる．

しかし，ここでは次なる次元に上る階段が存在する．同じ二つの 2-函手 F および G の間の二つの 2-自然変換 $\theta : F \to G$ および $\varphi : F \to G$ が与えられたとき，**モディフィケーション** (modification) と呼ばれる，自然変換どうしのある適当なマップ $\mu : \theta \Rightarrow \varphi$ が存在する．具体的に述べると，そのようなモディフィケーション μ は，T の各対象 a に 2-セル $\mu_a : \theta_a \Rightarrow \varphi_a$ を割り当てることが要求され，すべての 2-セル $\alpha : f \Rightarrow g$ について以下の 2-合成が等しくなるという性質を満たす．

$$Fa \;\underset{Fg}{\overset{Ff}{\Downarrow F\alpha}}\; Fb \;\underset{\varphi_b}{\overset{\theta b}{\Downarrow \mu_b}}\; Gb = Fa \;\underset{\varphi_a}{\overset{\theta_a}{\Downarrow \mu_a}}\; Ga \;\underset{Gg}{\overset{Gf}{\Downarrow G\alpha}}\; Gb \tag{10}$$

この要求の三次元的な説明は以下の通りである．



この立方体の前面は $F\alpha$ で，背面は $G\alpha$ である．底面は μ_b で，上面は μ_a であり，一方で，右および左側面の四角図式は可換である（なぜなら θ と φ は自然だから）．等式 (10) は前面から底面にかけての部分は上面から背面にかけての部分と等しいことを表している．

このことはモディフィケーション μ を 3-セル $\mu : \theta \Rightarrow \varphi$ と見なすことを

示唆している．これらの 3-セルは，2-セルとして θ（のようなもの），射として 2-函手，そして対象としての対象を伴って，3-圏に関する情報を形成する．2-圏を **Cat** において豊穣な hom 集合を持つ圏として定義できるのと全く同様にして，次の節で見ていくように，3-圏を 2-**Cat** において豊穣な hom 集合を持つ圏として形式的に定義することができる．

5　一つの集合からなる圏

圏は普通は対象の集合と射の集合という二つの集合からなる構造として考えられる．しかしながら，対象を特別な射 —— すなわち恒等射と見なすことにより，射の集合という一つの集合だけを用いた定義を考えることも可能である．第 I 章第 1 節において，そのような圏の「射だけの」定義は既に説明されている．ここでは，n-圏を記述するために以下に用いられるような，従来と異なる射だけの形式化について触れる．圏は射の集合 C であり，「ソース」および「ターゲット」と呼ばれる二つの関数 $s, t : C \to C$ と，合成と呼ばれる部分的に定義された二項演算 $\#$ を伴う．これらの関数や演算はすべて以下の公理に従う．C の中のすべての x, y, z について以下が成り立つ．

演算 $x \# y$ が定義されるのは，$sx = ty$ のときであり，以下が成り立つ．

$$s(x \# y) = sy, \qquad t(x \# y) = tx. \tag{1}$$

$$x \# sx = x, \qquad tx \# x = x. \tag{2}$$

左辺または右辺が定義されているとき，$(x \# y) \# z = x \# (y \# z)$. (3)

$$ssx = sx = tsx, \qquad ttx = tx = stx. \tag{4}$$

さらにこのとき，x が恒等射であることと $x = sx$ は同値であり，これはまた，$x = tx$ とも同値である．

この形式では，函手 $F : C \to D$ は単に集合 C から集合 D への関数で，

$$sF = Fs \qquad \text{かつ} \qquad tF = Ft : C \to D, \tag{5}$$

さらに，$x \# y$ が定義されているとき（このときは，(5) より $Fx \# Fy$ が定義されている），

$$F(x \# y) = Fx \# Fy \tag{6}$$

を満たすものである．

圏または函手に対するこの定義は，対象の集合と射の集合を用いた標準的な定義と明らかに同値である．

2-圏も同様に（たとえば自然変換の）2-セルの集合と見なされる一つの集合 X として考えることができる．そのときは前者の 1-セル（射）と 0-セル（対象）はちょうど特別な「退化」2-セルと見なされる．このとき，2-セルの集合 X 上に「水平」構造 $(\#_0, s_0, t_0)$ および「垂直」構造 $(\#_1, s_1, t_1)$ という二つの圏構造が存在する．それぞれは圏構造に関する先の公理に加えて次の公理を満たす．

(i) すべての 0-構造に関する恒等セルは 1-構造に関する恒等セルである．
(ii) 二つの圏構造はお互いに可換である．

ここで，(ii) はもちろん

$$s_0s_1 = s_1s_0, \qquad s_0t_1 = t_1s_0, \qquad t_0s_1 = s_1t_0, \qquad t_0t_1 = t_1t_0 \tag{7}$$

が成り立ち，しかも，$\alpha, \beta = 0, 1$ または $1, 0$ のとき，すべての x, y, u および v について，

$$\begin{aligned} &(x \#_\alpha y) \#_\beta (u \#_\alpha v) = (x \#_\beta u) \#_\alpha (y \#_\beta v), \\ &t_\alpha(x \#_\beta y) = (t_\alpha x) \#_\beta (t_\alpha y), \\ &s_\alpha(x \#_\beta y) = (s_\alpha x) \#_\beta (s_\alpha y) \end{aligned} \tag{8}$$

が，両辺が定義されているとき成り立つことを意味する．

s_0x と t_0x は 0-構造に関する恒等セルなので，上記の条件 (i) により，それらは 1-構造の恒等セルでもある．よって，

$$s_1s_0 = s_0, \qquad t_1s_0 = s_0, \qquad s_1t_0 = t_0, \qquad t_1t_0 = t_0 \tag{9}$$

が成り立つ．よって，条件 (7) と合わせると，

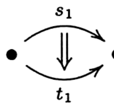
$$s_0s_1 = s_0, \qquad s_0t_1 = s_0, \qquad t_0s_1 = t_0, \qquad t_0t_1 = t_0 \tag{10}$$

も得られる．これらの規則と (4) を合わせて，s または t と，s または t との

合成を計算する．その結果は，以下のような，2-セルの「辺」に対する直観的な描写と一致する．

$$s_1 = s_1 s_1 = t_1 s_1,$$

$$s_0 s_1 = s_0 t_1 = s_0 s_0 = t_1 s_0 = s_0$$



$$t_0 = t_0 s_1 = t_0 t_1 = s_1 t_0 = t_0 t_0,$$

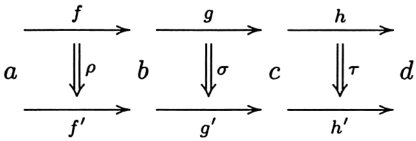
$$t_1 = t_1 t_1 = s_1 t_1.$$

ここで，この準備のもとで，3-圏あるいは任意の自然数 n に対するより一般的な n-圏を即座に定義することができる．後者は n 個の異なる圏構造，つまり $i = 0, \ldots, n-1$ に対する $(\#_i, s_i, t_i)$ を伴う集合 X である．ただし，各 $(\#_i, s_i, t_i)$ は他のすべてと可換であり，$j > i$ なる j について，構造 i に関する恒等セルが構造 j に関する恒等セルとなることを満たす．言い換えれば，$j > i$ に対する $\#_i$ と $\#_j$ による各組が 2-圏をなす．このことから即座に ω-圏，つまり $i = 0, 1, 2, \ldots$ で考えた場合のものに対する有効な概念を定義できるようになる．

6　双圏

圏の候補となるものにおける射の合成で，結合律は満たさないが，同型「を除いて」のみ結合律を満たすものは，場合によってはあり得る．このことから，2-圏に近い構造を持つが，射の合成の結合律は適当な 2-セルによって与えられる同型を除いてのみ成り立つ双圏 (bicategory) という概念が考えられる．

形式的には，双圏 B は 0-セル a, b, ...，1-セル f, g, ...，2-セル ρ, σ, ...から構成されており，これらのソースやターゲットは次の図のように配置される．



(1)

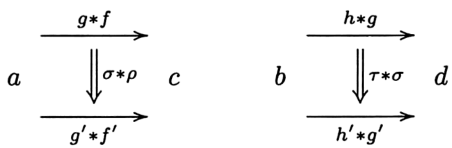
ここで 1-セルは水平方向に伸び，2-セルは垂直方向に伸びている．特に，各

1-セル f は $f: a \to b$ の通り 0-セル a および b をドメインおよびコドメインに持ち，その一方で各 2-セル ρ は端を共有する（つまり平行する）1-セル f および f' をドメインおよびコドメインに持つ．さらに，0-セルによる各組 (a, b) について，対象はすべて a から b への 1-セル $f, f', \ldots$ であり，射はそのような 1-セルどうしの 2-セルとなるような（従来の）圏 $B(a, b)$ が存在する．この圏 $B(a, b)$ において，2-セルの「垂直」合成は（もちろん）結合律を満たし，各対象 $f: a \to b$ についてこの垂直合成に関する恒等セルとしての振る舞いを持つ 2-セル $1_f: f \Rightarrow f$ が存在する．この合成は並べることによって，あるいは $\circ$ によって表される．

次に，0-セル a, b, c による順序付きの各三つ組に対して，ある双函手

$$* : B(b, c) \times B(a, b) \to B(a, c) \tag{2}$$

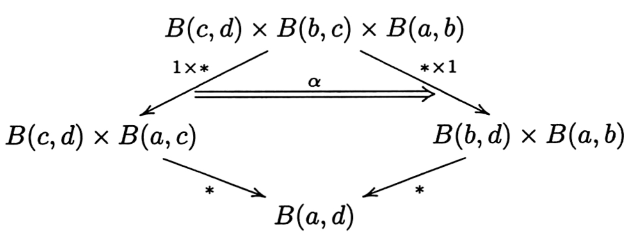
が存在する．この函手を水平合成と呼び $*$ で表す．このとき，先に与えられた図式 (1) について，以下の図のような，ある合成された 2-セル $\sigma * \rho$, $\tau * \sigma$ および合成された 1-セル $g * f$ が存在する．



(3)

また各 0-セル a について恒等 1-セル $1_a: a \to a$ が存在する．(ただし，これは従来の恒等射と全く同じではない．以下を参照されたい．)

この水平合成 $*$ は，圏の合成に対する通常の順序で書かれているが，正確には結合律は満たしていなくて，次のように，合成を繰り返して得られる函手どうしの自然同型 α「を除いて」のみ結合律を満たす．



(4)

α が函手どうしの自然変換であることの要請は (1) で表された 2-セルに関す

る以下のような可換性に相当する．

$$\begin{array}{ccc} h*(g*f) & \xrightarrow{\alpha} & (h*g)*f \\ {\scriptstyle \tau*(\sigma*\rho)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\tau*\sigma)*\rho} \\ h'*(g'*f') & \xrightarrow[\alpha]{} & (h'*g')*'f' \end{array} \tag{5}$$

「恒等射」であることを意図された射 1_a は，$f \in B(a,b)$ について自然な以下の同型 λ および ρ

$$\rho_{a,b} : f * 1_a \Rightarrow f, \qquad \lambda_{a,b} : 1_b * f \Rightarrow f \tag{6}$$

だけを除いて水平合成に関する恒等射として振る舞うことを要求される．

これら三つの自然変換 α, λ および ρ は次のような二つの「コヒーレンス」公理のためのものである．上記の 1-セル f, g および h，さらに $k : d \to e$ について，モノイダル圏のために要求される図式（第 VII 章第 1 節の (5)）をそのまま持ってきたような，以下の五角図式が可換でなくてはならない．

$$\begin{array}{ccccc} k*(h*(g*f)) & \xrightarrow{\alpha} & (k*h)*(g*f) & \xrightarrow{\alpha} & ((k*h)*g)*f \\ {\scriptstyle k*\alpha}\downarrow & & & & \uparrow{\scriptstyle \alpha*f} \\ k*((h*g)*f) & & \xrightarrow[\alpha]{} & & (k*(h*g))*f \end{array} \tag{7}$$

λ および ρ について，第 VII 章第 1 節の (7) にあるモノイダル圏のときのように，以下の図式（左および右の恒等セル）は可換でなくてはならない．

$$\begin{array}{ccc} g*(1_b*f) & \xrightarrow{\alpha} & (g*1_b)*f \\ {\scriptstyle 1*\lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho*1} \\ g*f & = & g*f \end{array} \tag{8}$$

従来の圏 C に対して，すべての射の向きが逆になっている，双対的または「逆の」圏 C^{op}（第 II 章第 2 節）へ注意が推移するのはよくあることである．双圏（または 2-圏）に関しては，そのような扱いは二つある．一つは射を逆向きにすることによって得られ，もう一つは 2-セルを逆向きにすることによって得られる！

双圏どうしの函手（つまりモルフィズム）に対する適当な定義もまた存在す

る．読者に対し，自力で定義を作ること，あるいは文献（たとえば，Bénabou [1967]）を調べることをお勧めしたい．

7　双圏の例

まず，任意のモノイダル圏 M は一つだけの 0-セルを持つ双圏 B でもある．モノイダル圏 M の対象 $a, b, \ldots$ を，テンソル積を合成として持つ B の 1-セルと考え，さらに M の射を 2-セルとして考えさえすればよい．そうすれば，M と共に与えられる自然同型 α, λ および ρ は，つい先ほどの五角図式と四角図式の中で表されていた，同じ恒等セルを持つ B に関して求められているものにちょうど一致する．相互的に見れば，0-セルを一つだけ持つ双圏 B はこの意味でモノイダル圏に他ならない．さらに言えば，モノイダル圏に関するコヒーレンス定理は双圏におけるマップ ρ, λ および α に関するコヒーレンスの結果を与えるのにも適用される．

次の例は環の圏，より正確には，

0-セルは環 R, S, T,
1-セルは双加群 ${}_SA_R : R \to S$，かつ
2-セルは双加群準同型 (bimodule homomorphism) $A \to A'$

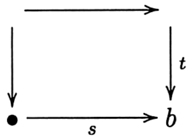
を満たす双圏である．1-セルの合成に関して言えば，${}_TB_S$ が T-S-双加群のとき，$b \in B$ および $a \in A$ に対する積 $b \otimes a$ で，$s \in S$ について $bs \otimes a = b \otimes sa$ を満たし，その他も満たすような積の和を要素に持つ，加群の通常のテンソル積 $B \otimes_S A$ は明らかに T-R-双加群である．U-T-双加群 ${}_UC_T$ に対して既に知られている加群のテンソル積の結合律

$$C \otimes_T (B \otimes_S A') \cong (C \otimes_T B) \otimes_S A' \tag{1}$$

から，この水平合成に関して要求される結合律が得られる．垂直合成は双加群準同型 $A \to A' \to A''$ の通常の合成である．

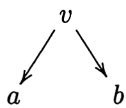
次に,「スパン」―― すべての引き戻しを持つ基底圏 C におけるスパン ―― による双圏について述べる．C の対象 b を共通のターゲットに持つ射 s, t の各組について，s と t の「カノニカルな」引き戻しと呼ばれる引き戻しを一

つ選ぶ．



(2)

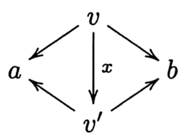
ここで，基底圏 C における a から b へのスパン (span) は，図



(3)

のように，ある共通の頂点 v から a と b への射の組として定義される．ここで双圏 $\mathrm{Span}(C)$ を

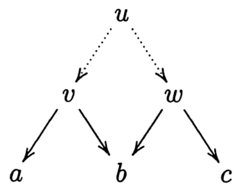
0-セルは与えられた圏 C の対象，
1-セルは上記の C のスパン，かつ
a から b への上記のような二つのスパンの間の 2-セルは，図



(4)

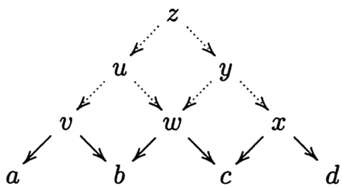
にあるような二つの三角図式を可換にする C の 1-セル $x : v \to v'$

となるように定義する．このような二つの 2-セルの垂直合成は真中の射 x の（C における）合成によって与えられる．a から b へのスパンと b から c へのスパンとの水平合成は，図



(5)

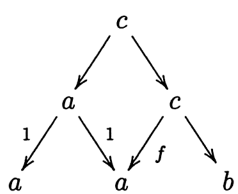
にある真中の二つの射の（既に定められた）カノニカルな引き戻しを取ることにより得られる．この合成の結合律を調べるために，図



(6)

のように，a から b, c さらに d へと連続する三つのスパンを考える．このとき，上の図にあるように，上部に三つの（カノニカルな）引き戻しによる四角図式が新たに得られる．それらの四角図式は引き戻しなので，ここで合成された四角図式も引き戻しとなる．よって，三重合成がどちらの結合順序でなされたものであっても，頂点が最上部の 0-セル z となる与えられた三つのスパンの引き戻しと等しくなるような引き戻しが得られる．そのような任意の図式の引き戻しは同型を除いて一意的なので，このことより，一つの三重合成から他の三重合成への求める自然同型が得られた．それゆえ，α に対する五角図式の可換性に関する条件が成り立つ根拠も示せた．

0-セル a 上の恒等スパンは，a から a への C の二つの恒等射を組み合わせたものである．a から b への二つ目のスパンとの引き戻し図式



(7)

はこの合成において求められる自然変換 λ を示している．公理の残りの部分についての確かめは読者に任せたい．

双圏は「弱 2-圏」とも呼ばれる．この術語は弱 n-圏の概念もあり得ることを示唆している．これは実際に成り立つことであり，理論物理学の局面で様々な定義を伴って現れる（Baez et al. [1995, 1996] を参照されたい）．

8　接合加群と Grp における圏

圏対象の説明に戻ろう．結果的には，**Grp** における圏対象はホモトピー論の中で生まれた「接合加群 (crossed module)」の一つと本質的に等しい．こ

こでは，この重要な圏論的結果に対する，私のために George Janelidze が定式化してくれた証明を紹介する．

接合加群は群 H および P による組で，P の H への作用およびこの作用に関係する準同型 $\propto: H \to P$ を伴うものとして定義される．このことは，元 h への P の元 p の作用を h^p で表すとすると，H の中の h, k および P の中の p, q について，$h^1 = h$，かつ

$$(h^p)^q = h^{pq}, \qquad (hk)^p = h^p k^p, \qquad \propto (h^p) = p^{-1}(\propto h)p$$

が成り立つことを意味する．このような接合加群がホモトピー論において生み出されている．

ここで第 1 節より，**Grp** における内部圏は，二つの群 C_0 および C_1 と，内部圏に対する従来の条件を満たす四つの群準同型

$$C_1 \underset{d_0}{\overset{d_1}{\rightrightarrows}} C_0 \qquad C_0 \xrightarrow{i} C_1 \qquad \gamma : C_1 \times_{C_0} C_1 \to C_1 \tag{1}$$

から成り立っていることを思い出そう．まず，この体系においては圏論的な合成 γ を忘れてもよいことを示す．つまり，この体系は群と準同型の図式

$$C_1 \underset{d_0}{\overset{d_1}{\rightrightarrows}} C_0 \qquad C_0 \xrightarrow{i} C_1 \tag{2}$$

で

$$d_0 i = 1 = d_1 i \tag{3}$$

を満たし，さらに群準同型 d_0 および d_1 の核からなる C_1 の次のような交換子群の消失

$$[\operatorname{Ker} d_0, \operatorname{Ker} d_1] = 1 \tag{4}$$

を満たすものによって完全に定まることを示す．

実際，群準同型 d_0, d_1 および i を合わせて使うと合成 γ を「思い出す」ことができることを示すために，合成可能なモルフィズムの組によるこの合成

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$$

を $g \circ f$ で表す．これは群の積に対するモルフィズムなので，ここで積を並列 $g_1 g_2$ で書くとすると，

$$(g_1 g_2) \circ (f_1 f_2) = (g_1 \circ f_1)(g_2 \circ f_2)$$

が，両側の合成が共に定義されている限り成り立つ（これはやはり中央四者交換のことである）．特に，この結果を b の恒等射 1_b に適用すると

$$\begin{aligned} g \circ f &= (1_b 1_b^{-1} g) \circ (f 1_b^{-1} 1_b) \\ &= (1_b \circ f)(1_b^{-1} \circ 1_b^{-1})(g \circ 1_b) \\ &= f(1_b^{-1} \circ 1_b^{-1}) g \end{aligned} \tag{5}$$

が得られる．$f = g = 1_b$ とすると積の式

$$1_b = 1_b(1_b^{-1} \circ 1_b^{-1}) 1_b$$

が成り立ち，よって

$$(1_b^{-1} \circ 1_b^{-1}) = 1_b^{-1}$$

となる．このことは $(\ )^{-1} : C \to C$ が何らかの函手になるという事実からでも導かれる．ここで C は群対象である．

(5) にこれを当てはめると，

$$g \circ f = f 1_b^{-1} g$$

が得られる．言い換えると，圏論的な合成 γ は C の群構造によって定まる．代わりになるものとして，

$$\begin{aligned} g \circ f &= (g 1_b^{-1} 1_b) \circ (1_b 1_b^{-1} f) \\ &= (g \circ 1_b)(1_b^{-1} \circ 1_b^{-1})(1_b \circ f) \\ &= g 1_b^{-1} f \end{aligned}$$

も得ることができる．よって，群の積は

$$f 1_b^{-1} g = g 1_b^{-1} f$$

を満たす．特に，C_0 の対象 b が群 C_0 の単位元ならば —— そのとき $1_b = i(b)$

は C_1 の単位元になる —— $fg = gf$ が成り立つ．しかし b は群 C_0 の単位元なので，b をドメインに持つ圏の射 g は $\mathrm{Ker}\, d_0$ に含まれなくてはならない．一方，f も同様に $\mathrm{Ker}\, d_1$ に含まれる．よって，$fg = gf$ は上記 (4) の交換子が単位元であることを意味する．

逆に，**Grp** において図式 (2) が (3) および (4) と共に与えられたとき，圏論的な合成 $\gamma : C_1 \times_{C_0} C_1 \to C_1$ を

$$\gamma(g, f) = f 1_b^{-1} g \quad \text{または} \quad g 1_b^{-1} f$$

とすることによって定義できる．このとき簡単な計算によって，この γ が **Grp** の内部圏に関する合成になることが示せる．

次に，圏 **Grp** における情報 (2), (3), (4) によって，接合加群 $\alpha : H \to P$ が以下のように定まる．

$$H = \mathrm{Ker}\, d_0, \qquad P = C_0.$$

このとき，d_1 の $\mathrm{Ker}\, d_0$ への制限 d_1' は準同型

$$\alpha : H \to P$$

となる．実際，

$$1 \to \mathrm{Ker}\, d_0 \to C_1 \xrightarrow{d_0} C_0 \to 1$$

は C_0 の $H = \mathrm{Ker}\, d_0$ への作用を —— 標準的な方法で —— 定める群の短完全系列となる．つまり，$\mathrm{Ker}\, d_0$ の各元に対して，C_0 の各元に対する C_1 における適当な代表元によって共役を取ればよい[2]．$i : C_0 \to C_1$ が $d_0 i = 1$ を満たし，それによって上記の短完全系列が i によって「分裂」することに注意されたい．逆に，接合加群 $\alpha : H \to P$ がそのような群の分裂完全系列を定めることを読者は示せるだろう．これらの相互的な構成から，接合加群の圏が **Grp** における (3) と (4) を満たす図式 (2) の圏と圏論的に等しいことが示される．

---

[2]　［訳注］実際，各 $h \in H$ および $p \in P$ に対して，$h^p := i(p)^{-1} h\, i(p)$ とすればよい．

付録　基礎論

これまでは対象の集合や射の集合というように集合で圏を記述してきた．しかし圏は直接記述することもできる —— よって，あらゆる数学に適用可能な基礎論として用いること，すなわちそういった基礎論における集合論の通常のツェルメロ–フレンケル公理系の使用と置き換えることができる．直接の記述とは次のようなものである．

1. **対象と射**．圏は対象 $a, b, c, \ldots$ と射 $f, g, h, \ldots$ からなる．集合は，集合を対象とし関数を射とする圏をなす．
2. **ドメイン**．各射 f はその「ドメイン」としてある対象 a を持ち，「コドメイン」としてある対象 b を持つ．このとき $f : a \to b$ と書く．
3. **合成**．$f : a \to b$ と $g : b \to c$ が与えられたとき，これらの合成はある射 $g \circ f : a \to c$ である．
4. **結合律**．さらに $h : c \to d$ が与えられたとき，三つの合成は結合的である．

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f : a \to d\ .$$

5. **恒等律**．各対象 b は恒等射 $1_b : b \to b$ を持つ．さらに $f : a \to b$ ならば，$1_b \circ f = f$ を満たす．同様に $g : b \to c$ ならば，$g \circ 1_b = g$ を満たす．

初等トポスとは，ある付加的な構造，すなわち終対象，引き戻し，真，部分対象分類子，冪対象（部分集合の集合）といったものを持つ圏である．この付加的な構造の公理は以下のようになる．

6. **終対象**．すべての対象 a が射 $a \to 1$ をちょうど一つ持つような終対象 1 が存在する．
7. **引き戻し**．コドメインが共通な射の対 $f : a \to b \leftarrow c : g$ はすべて第 III 章第 4 節で定義された引き戻しを持つ．

$$\begin{array}{ccc} p & \longrightarrow & c \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ a & \underset{f}{\longrightarrow} & b \end{array} \tag{1}$$

特に（$b = 1$ とおけば）任意の対象 a, c は積 $a \times c$ を持つ．

8. **真**．対象 Ω（真偽値の対象）および真 (truth) と呼ばれる単射 $t : 1 \to \Omega$ が存在する．このとき任意の単射 $m : a \to b$ について，以下の四角図式が引き戻しになるような一意的な射 $\psi : b \to \Omega$ が存在する．

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & 1 \\ {\scriptstyle m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t} \\ b & \underset{\psi}{\longrightarrow} & \Omega \end{array} \tag{2}$$

9. **冪対象**．各対象 b について，それに関連した対象 Pb と射 $\varepsilon_b : b \times Pb \to \Omega$ が存在して，すべての射 $f : b \times a \to \Omega$ について以下の図式を可換にする一意的な射 $g : a \to Pb$ が存在する．

$$\begin{array}{ccc} b \times a & \overset{f}{\longrightarrow} & \Omega \\ {\scriptstyle 1\times g}\downarrow & & \| \\ b \times Pb & \underset{\varepsilon_b}{\longrightarrow} & \Omega \end{array} \tag{3}$$

これらの公理を理解するために，これらが通常のすべての集合からなる圏にどのように適用されるかを見てみよう．そこでは，ちょうど一つの要素を持つ任意の集合は，各集合 a がそれぞれ 1 への一意的な関数 $a \to 1$ を持つので，終対象 1 として用いることができる．すると，二つの集合 a, b について二つの射 $a \to 1 \leftarrow b$ の引き戻しは，与えられた積の因子 a, b への射影を伴う通常の集合論的な積となる．

真偽値について，対象 Ω を二つの対象 $1, 0$ からなる任意の集合 2 とし，単

射 $t : 1 \to 2$ を単に 1 の 2 への通常の包含とする．すると，公理 8 にあるような単射 $m : a \to b$ は b の部分集合 a である．この部分集合は，b の要素 y が部分集合 a に入っているか否かで $\psi(y) = 1$ もしくは 0 となるよく知られた特性関数 $\psi : b \to 2$ を持つ．このことは上の引き戻し (2) を生み出す．

公理 9 は b のすべての部分集合 s からなる集合 Pb を記述する．これはしばしば「冪集合」Pb と呼ばれる．このとき実際に，b の要素 x が部分集合 s に含まれているときは $\varepsilon_b(x, s) = 0$ とし，そうでないときは 1 と等しいとすることができる．これは上の (3) にあるような引き戻しを与える．

よって，これらのトポスの公理は集合の圏について成り立つ．これらは数々の強力な帰結を持つ．たとえば，これらはすべての有限な圏論的積と引き戻しを与え，同様に，始対象 $\varnothing$ すなわち空集合を含めた，すべての有限な余積も与える．たとえば，これらは a の函手としての積 $a \times b$ の右随伴をもたらす．これは以下を満たす冪乗 c^b である（第 IV 章第 6 節を見られたい）．

$$\hom(a \times b, c) \cong \hom(a, c^b) \ .$$

すると，集合の圏は，上のように定義された上に三つの付加的な性質を持つ初等トポスとして記述することができる．

(a) ウェルポインテッドである．

(b) 選択公理 (AC) を持つ．

(c) 自然数対象 (NNO) を持つ．

これらの性質を記述する際には，対象を集合，射を関数と考えると便利である．

ウェルポインテッド (well-pointed) は，二つの射 $f, g : a \to b$ が $(f \neq g)$ であるとき，$fp \neq gp$ を満たす射 $p : 1 \to a$ が存在しなければならない，ということを要請する．その意図は，関数 f と g が異なるとき，それらの関数は，ある「点」p において，つまり集合 a のある要素 p において，異なるということである．

選択公理 (axiom of choice, AC) は，すべての全射 $f : a \to b$ は $f \circ \tau = b$ となる右逆射 $\tau : b \to a$ を持つことを要請する．この右逆射は，b の各点 $p : 1 \to b$ に対して a の点を取り出す．すなわちこれは合成 τp であり，f に

より p の上に写される．

自然数対象 (natural-numbers object, NNO) は始対象 $O: 1 \to N$ と後者関数 $s: N \to N$ を持つ集合 N として記述することができ，これを使えば，$f(0)$ と合成 $f \circ s$ を記述することにより N 上の関数 $f: N \to X$ を再帰的に定義できる．言い換えれば，圏の NNO N は N の点 O とマップ s からなる図式

$$1 \xrightarrow{O} N \xrightarrow{s} N$$

で，任意の $1 \xrightarrow{h} b \xrightarrow{k} b$ が与えられたとき，以下の図式を可換にする一意的な射 $f: N \to b$ が存在するようなものである．

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{O} & N & \xrightarrow{s} & N \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ 1 & \xrightarrow{h} & b & \xrightarrow{k} & b \end{array}$$

通常の関数記法では，このことは次のように表される．

$$fO = h, \qquad fs = kf$$

すなわち，f は $f(O)$ を与えることにより定義され，それから $f(n+1)$ が $f(n)$ により定義される．

こうして集合の圏は，AC を満たし NNO が存在するウェルポインテッドなトポスとして定義することができる．集合論のこの公理系はツェルメロの公理系と弱い意味で無矛盾である（いわゆる「有界な」ツェルメロである．Mac Lane-Moerdijk [1992] を見られたい）．これらは元々は Lawvere [1964] による．彼はこれらを「集合の圏の初等理論」と呼んだ．初等トポスの他の例としては位相空間上の層がある．Mac Lane-Moerdijk [1992] を見られたい．

これらの公理では，部分対象分類子 Ω がちょうど二つの要素を持つことがしばしば仮定される．こうするとブール代数になる．

標準的な圏とその対象や射の一覧表

Ab	アーベル群，p. 14
Adj	小圏，随伴，p. 135
Alg	$\langle \emptyset, E \rangle$-代数，p. 116
Bool	ブール代数
CAb	コンパクト位相アーベル群，p. 123
CAT	圏，函手，p. 371, p. 372
CGHaus	コンパクト生成ハウスドルフ空間，p. 248
Comp Bool	完備ブール代数，p. 163
Comp Haus	コンパクトハウスドルフ空間，p. 148
CRng	可換環，準同型，p. 15
$\mathbf{Ens}_V$	集合と関数（ユニバース V 内の），p. 13
Euclid	ユークリッドベクトル空間，直交変換，p. 297
Fin	有限集合の骨格的な圏，p. 52, p. 308
Finord	有限順序数，すべての集合関数，p. 14
Grp	群と準同型，p. 14
Grph	有向グラフとモルフィズム，p. 61
Haus	ハウスドルフ空間，連続写像，p. 180
Lconn	局所連結位相空間，p. 181
K-**Mod**	K-加群とそのモルフィズム，p. 15
Mod-R	右 R-加群（R は環），p. 15
R-**Mod**	左 R-加群とモルフィズム，p. 15
$\mathbf{Matr}_K$	自然数，射は長方形行列，p. 13
Mon	モノイドとモノイドのモルフィズム，p. 14
Moncat	モノイダル圏とストリクトモルフィズム，p. 219
Ord	順序集合，順序保存写像，p. 163
Rng	環と準同型，p. 15
Ses-A	A-加群の単完全系列，p. 273
Set	すべての小さな集合と関数，p. 14
$\mathbf{Set}_*$	基点付き集合，p. 14
Smgrp	半群とモルフィズム，p. 192

Top	位相空間，連続写像，p. 15
Toph	位相空間，写像のホモトピー類，p. 15
Vct	ベクトル空間，線型変換，p. 32, p. 70
0	空圏，p. 12
1	1 対象圏，p. 12
2	2 つの対象，p. 12
3	3 つの対象，p. 12
$\langle \Omega, E\rangle$-**Alg**	普遍代数（型 $\tau = \langle \Omega, E\rangle$ の），p. 165, p. 208
$b \downarrow C$	b の下方の C の対象，p. 57
$C \downarrow a$	a の上方の C の対象，p. 58
$T \downarrow S$	コンマ圏，p. 59

用語対照表

本書	他書（省略形については p. 394 を参照）
射	マップ (E & M)，モルフィズム (Gr)
arrow	map, morphism
ドメイン	ソース (Ehr)
domain	source
コドメイン	ターゲット (Ehr)
codomain	target
グラフ	前圏，図式スキーム (Mit)
graph	precategory, diagram scheme
自然変換	函手のモルフィズム (Gr)，函手的マップ (G-Z)
natural transformation	morphism of functors, functorial map
自然同型	自然同値（E & M; いまは使わない）
natural isomorphism	natural equivalence
モニック射	単射
monic	monomorphism
エピ射	全射，エピック射
epi	epimorphism, epic
冪等射	射影子 (Gr)
idempotent	projector
逆射	双対
opposite	dual
余積	和
coporduct	sum
イコライザ	核, 差分核
equilizer	kernel, difference kernel
引き戻し	ファイバー積 (Gr)，カルテシアン正方図式
pullback	fibered product, cartesian square
押し出し	コカルテシアン正方図式，コミート

pushout	cocartesian square, comeet
普遍射	左自由マップ (G-Z)
universal arrow	left liberty map
極限が存在	極限が表現可能 (Gr)
limit exists	limit is representable
極限	射影的極限，逆極限
limit	projective limit, inverse limit
余極限	帰納的極限，順極限
colimit	inductive limit, direct limit
函手への錐	射影的錐，逆錐 (G-Z)
cone to a functor	projective cone, inverse cone
函手からの錐	帰納的錐，余錐
cone from a functor	inductive cone, co-cone
左随伴	余随伴 (Mit)，随伴
left adjoint	coadjoint, adjoint
右随伴	随伴 (Mit)，余随伴
right adjoint	adjoint, coadjoint
随伴の単位元	随伴モルフィズム
unit of adjunction	adjunction morphism
三角恒等図式	ε が η の擬逆 (G-Z)
traiangular identity	ε quasi-inverse to η
モナド	トリプル
monad	triple
双積	直和（Ab-圏の）
biproduct	direct sum (in Ab-categories)
Ab-圏	前加法圏（古い用語）
Ab-category	preadditive category

Gr = Grothendieck
Ehr = Ehresmann
Mit = Mitchell
E & M = Eilenberg & Mac Lane
G-Z = Gabriel-Zisman

カタカナ表記された人物名とそれに対応する欧文名の一覧表

[訳者より] 読者の便宜のため，本文中の人名のカタカナ表記に対応するアルファベット名を，一覧として以下にまとめておく．

アイレンバーグ	Eilenberg	セール	Serre
アリストテレス	Aristotle	チェック	Čech
ヴィット	Witt	ツェルメロ	Zermelo
ウリソン	Urysohn	ティホノフ	Tychonoff
エプシュタイン	Epstein	ナイマルク	Naimark
カルナップ	Carnap	ネーター	Noether
カルタン	Cartan	バーコフ	Birkhoff
カン	Kan	フビニ	Fubini
カント	Kant	ブルバキ	Bourbaki
クルル	Krull	フレイド	Freyd
グロタンディク	Grothendieck	フレヴィッチ	Hurewicz
ゲーデル	Gödel	フレンケル	Fraenkel
ケリー	Kelley	ベルナイス	Bernays
ゲルファント	Gel'fand	ヘンゼル	Hensel
ゲンツェン	Gentzen	ポアンカレ	Poincaré
シュヴァレー	Chevalley	ホップ	Hopf
シュミット	Schmidt	ポントリャーギン	Pontrjagin
ジルバー	Zilber	マックレーン	Mac Lane
スティーンロッド	Steenrod	ムーア	Moore
ストーン	Stone	レマク	Remak
スパニア	Spanier		

参考文献

Adamek, J., Herrlich, H., Strecker, G. E. [1990]: Abstract and concrete categories. New York: John Wiley & Sons 1990.

André, Michel [1967]: Méthode simpliciale en algèbre homologique et algèbre commutative IV. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 32. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967.

— [1970]: Homology of simplicial objects. Proceeding of the AMS symposium in Pure Mathematics on Applications of Categorical Algebra, pp. 15–36. Providence: American Mathematical Society 1970.

Baez, J., Dolan, J. [1995]: Higher dimensional algebra and topological quantum field theory. J. Math. Phys. **36**, 60–105 (1995).

Baez, J., Neuchli, M. [1996]: Higher dimensional algebra, braided monoidal 2-algebras. Adv. Math. **121**, 196–244 (1996).

Barr, M., Beck, J. [1966]: Acyclic models and triples. Proceedings of the Conference on Categorical Algebra, La Jolla, 1965, pp. 336–343. New York: Springer 1966.

— [1969]: Homology and standard constructions. Seminar on Triples and Categorical Homology Theory, pp. 245–336. Vol. 80. Lecture Notes in Mathematics. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1969.

Barr, M., Wells, C. [1985]: Toposes, triples, and theories. Vol. 278. Grundlehren der Math. Berlin: Springer 1985.

— [1990]: Category theory for computing science. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall 1990.

Bass, Hyman [1968]: Algebraic K-theory. Mathematics Lecture Note Series. New York-Amsterdam: W. A. Benjamin, Inc. 1968.

Bénabou, Jean [1963]: Catégories avec multiplication. C. R. Acad. Sci. Paris **256**, 1887–1890 (1963).

— [1965]: Critères de représentabilité des foncteurs. C. R. Acad. Sci. Paris **260**, 752–755 (1965).

— [1967]: Introduction to bicategories, pp. 1–77. Vol. 40. Springer Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer 1967.

Birkhoff, Garrett [1967]: Lattice theory. AMS Colloquium Publications, Vol. 25, 3rd Ed. Providence: American Mathematical Society 1967.

Borceux, F. [1994]: Handbook of categorical algebra; Vol. 1, Basic category theory, Vol. 2 Categories and structures, Vol. 3 Categories of sheaves. Encyclopedia of

mathematics and its applications, Vols. 50, 51, and 52. Cambridge: Cambridge University Press 1994.

Bourbaki, N. [1948]: Éléments de mathématique, Vol. VII, Algèbre, Livre II, Algèbre multilineaire, ch. 3. Actualités scientifiques et industrielles, 1044. Paris: Hermann 1948.

— [1957]: Éléments de mathématique, Vol. XXII, Théorie des ensembles, Livre I, Structures, ch. 4. Actualités scientifiques et industrielles, 1258. Paris: Hermann 1957.

Brown, Ronald [1964]: Function spaces and product topologies. Quart. J. Math. **15**, 238–250 (1964).

Buchsbaum, David A. [1955]: Exact categories and duality. Trans. Am. Math. Soc. **80**, 1–34 (1955).

Bucur, I., Deleanu, A. [1968]: Introduction to the theory of categories and functors. London-New York-Sydney: John Wiely and Sons, Ltd. 1968.

Cartan, H., Eilenberg, S. [1956]: Homological algebra. Princeton: Princeton University Press 1956.

Cassels, J. W. S., Fröhlich, A., Edrs. [1967]: Algebraic number theory. London: Academic Press 1967.

Cohen, Paul J. [1966]: Set theory and the continuum hypothesis. New York-Amsterdam: W. A. Benjamin 1966.

Cohn, P. M. [1965]: Universal algebra. New York-Evanston-London: Harper and Row 1965.

Day, B. J., Kelly, G. M. [1969]: Enriched functor categories. Reports of the Midwest Category Seminar, Vol. III, pp. 178–191, Vol. 106, Lecture Notes in Mathematics. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1969.

Doplicher, S., Roberts, J. E. [1989]: A new duality for compact groups. Invent. Math. **98**, 157–221 (1989).

Dubuc, E. J. [1970]: Kan extensions in enriched category theory. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 145. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970.

Dubuc, E. J., Porta, H. [1971]: Convenient categories of topological algebras, and their duality theory. J. Pure Appl. Algebra. **1**, 281–316 (1971).

Dubuc, E. J., Street, R. [1970]: Dinatural transformations. Reports of the Midwest Category Seminar, Vol. IV, pp. 126–138, Vol. 137, Lecture Notes in Mathematics. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970.

Ehresmann, Ch. [1965] : Catégories et structures. Paris: Dunod 1965.

Eilenberg, S., Elgot, S. E. [1970]: Recursiveness. New York-London: Academic Press 1970.

Eilenberg, S., Kelly, G. M. [1966a]: Closed categories. Proceedings of the Conference on Categorical Algebra, La Jolla, 1965, 421–562. New York : Springer 1966.

— [1966b]: A generalization of the functorial calculus. J. Algebra **3**, 366–375 (1966).

Eilenberg, S., Mac Lane, S. [1942a]: Group extensions and homology. Ann. Math. **43**, 757–831 (1942).

— [1942b]: Natural isomorphisms in group theory. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **28**, 537–543 (1942).

— [1943]: Relations between homology and homotopy groups. Pro. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **29**, 155–158 (1943).

— [1945]: General theory of natural equivalences. Trans. Am. Math. Soc. **58**, 231–294 (1945).

— [1947]: Cohomology theory in abstract groups I. Ann. Math. **48**, 51–78 (1947).

Eilenberg, S., Moore, J. C. [1965]: Adjoint functors and triples. Illinois J. Math. **9**, 381–398 (1965).

Eilenberg, S., Steenrod, N. E. [1952]: Foundations of algebraic topology. Princeton: Princeton University Press 1952.

Epstein. D. B. A. [1966]: Functors between tensored categories. Inventiones Math. **1**, 221–228 (1966).

Fox, R. H. [1943]: Natural systems of homomorphisms. Preliminary Report. Bull. Am. Math. Soc. **49**, 373 (1943).

Freyd, P. [1964]: Abelian categories: An introduction to the theory of functors. New York: Harper and Row 1964.

— [1972]: Aspects of topoi. Bull. Austral. Math. Soc. **7**, 1–72, 467–481 (1972).

Freyd, P. J., Scedrov, A. [1993]: Categories, allegories. Amsterdam: North-Holland 1993.

Freyd, P.J., Yetter, D. [1990]: Braided compact monoidal categories with applications to low dimensional topology. Adv. Math. **77**, 1950–1982 (1990).

Gabriel, P. [1962]: Des catégories abéliennes. Bull. Soc. Math. France **90**, 323–448 (1962).

Gabriel, P., Ulmer, F. [1971]: Lokal Praesentierbare Kategorien. Vol. 221. Springer Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer 1971.

Gabriel, P., Zisman. M. [1967]: Calculus of fractions and homotopy theory. Ergebnisse der Mathematik, Vol. 35. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967.

Godement, R. [1958]: Théorie des faisceaux. Paris: Hermann 1958.

Gödel, K. [1940]: The consistency of the continuum hypothesis. Ann. of Math. Studies, No. 3. Princeton: Princeton University 1940.

Goguen, J. A. [1971]: Realization is universal. Math. Syst. Theory **6**, 359–374 (1971).

Grätzer, G. [1968]: Universal algebra. Princeton: Van Nostrand and Co. Inc. 1968.

Grothendieck, A. [1957]: Sur quelques points d'algèbre homologique. Tohoku Math. J. **9**, 119–221 (1957).

Hatcher, W. S. [1968]: Foundations of mathematics. Philadelphia-London-Toronto: W. B. Saunders Co. 1968.

Herrlich, H. [1968]: Topologische Reflexionen und Coreflexionen. Lecture Notes in

Mathematics, Vol. 78. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1968.
Huber, P. J. [1961]: Homotopy theory in general categories. Math. Ann. **144**, 361–385 (1961).
— [1962]: Standard Constructions in abelian categories. Math. Ann. **146**, 321–325 (1962).
Hurewicz, W. [1941]: On duality theorems. Bull. Am. Math. Soc. **47**, 562–563 (1941).
Isbell, J. R. [1960]: Adequate subcategories. Illinois J. Math. **4**, 541–552 (1960).
— [1964]: Subobjects, adequacy completeness and categories of algebras, Rozprawy Mat. **36**, 3–33 (1964).
— [1968]: Small subcategories and completeness. Math. Syst. Theory **2**, 27–50 (1968).
Johnstone, P. T. [1977]: Topos theory. LMS Math. Monographs. New York: Academic Press 1977.
— [1982]: Stone spaces. Vol. 3. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press 1982.
Johnstone, P. T., Paré, P. [1978]: Indexed categories and their applications, Vol. 661. Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer 1978.
Joyal, A., Street. R. [1991]: Tortile Yang-Baxter operators in tensor categories. Adv. Math. **71**, 43–51 (1991).
— [1991]: The geometry of tensor calculus I. Adv. Math. **88**, 55–112 (1991).
— [1986]: Braided monoidal categories, revised. Macquarie Math. Reports no. 86081, Macquarie University, Australia.
— [1993]: Braided tensor categories. Adv. Math. **102**, 20–78 (1993).
Joyal, A., Tierney, M. [1984]: An extension of the Galois theory of Grothendieck, Mem. Am. Math. Soc. **390** (1984).
Kan, D.M. [1958]. Adjoint functors. Trans. Am. Math. Soc. **87**, 294–329 (1958).
Kapranov, M., Voevodsky, V. [1994]: Braided monoidal 2-categories and Manin-Schechtmann higher braid groups, Journal of Pure and Applied Algebra **92**, 241–267 (1994).
— [1994]: Braided monoidal 2-categories, 2-vector spaces and Zamolodchikov tetrahedral equations. Symposia in Pure Mathematics, Vol. 56, part 2 pp. 177–260. Providence, RI: American Mathematical Society 1994.
Kauffman, L. [1993]: Knots and physics, 2nd edition. Riveredge, NJ: World Scientific 1993.
Kelly, G.M. [1964]: On Mac Lane's condition for coherence of natural associativities. J. Algebra **1**, 397–402 (1964).
— [1982]: Basic concepts of enriched category theory. LMS Lecture Notes. Cambridge: Cambridge University Press 1982.
Kelly, G.M., Street, R. [1974]: Review of the elements of 2-categories, pp. 75–103. Vol. 420. Springer Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer 1974.
Kleisli, H. [1962]: Homotopy theory in abelian categories. Canad. J. Math. **14**, 139–

169 (1962).

— [1965]: Every standard construction is induced by a pair of adjoint functors. Proc. Am. Math. Soc. **16**, 544–546 (1965).

Lambek, J. [1968]: Deductive systems and categories I. Math. Syst. Theory **2**, 287–318 (1968).

Lambeck, J., Scott, P. J. [1986]: Introduction to higher order categorical logic. Cambridge: Cambridge University Press 1986.

Lamotke, K. [1968]: Semisimpliziale algebraische Topologie. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1968.

Lawvere, F. W. [1963]: Functorial semantics of algebraic theories. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **50**, 869–873 (1963).

— [1964]: An elementary theory of the category of sets. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **52**, 1506–1511 (1964).

— [1966]: The category of categories as a foundation for mathematics. Proceedings of the Conference on Categorical Algebra, La Jolla, 1965, pp. 1–21. New York: Springer 1966.

— [1970]: Quantifiers and sheaves, pp. 329–334. Nice: Actes du congress International des Mathematiciens 1970.

Linton, F. E. J. [1966]: Some aspects of equational categories. Proceedings of the Conference on Categorical Algebra, La Jolla, 1965, pp. 84–95. New York: Springer 1966.

Mac Lane, S. [1948]: Groups, categories, and duality, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **34**, 263–267 (1948).

— [1950]: Duality for groups. Bull. Am. Math. Soc. **56**, 485–516 (1950).

— [1956]: Homologie des anneaux et des modules. Colloque de topologie algébrique, Louvain 1956, pp. 55–80.

— [1963a]: Homology. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1963.

— [1963b]: Natural associativity and commutativity. Rice Univ. Studies **49**, 28–46 (1963).

— [1965]: Categorical algebra. Bull. Am. Math. Soc. **71**, 40–106 (1965).

— [1969]: One universe as a foundation for category theory. Reports of the Midwest Category Seminar, Vol. III, pp. 192–201. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 106. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1969.

— [1970]: The Milgram bar construction as a tensor product of functors; 135–152 in the Steenrod Algebra and its Applications, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 168. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970.

— [1991]: Coherence theorems and conformal field theory. pp. 321–328. Category theory. 1991. Proceedings of an International Summer Category Theory Meeting. CMS Conference Proceedings Vol. 13. Providence, RI: American Mathematical Society 1991.

— [1995]: Categories in geometry, algebra and logic, pp. 169–178 in Mathematica Japonica Vol. 42.

— [1996]: The development and prospects for category theory. Appl. Categor. Struct. **4**, 129–136 (1996).

Mac Lane, S., Moerdijk, I. [1992]: Sheaves in geometry and logic. A first introduction to topos theory. New York: Springer-Verlag 1992.

Mac Lane, S., Birkhoff, G. [1967]: Algebra. New York: Macmillan 1967. 3rd edition. New York: Chelsea 1988.

Makkai, M., Paré, R. [1989]: Accessible categories: The foundations of categorical model theory, Contemporary Math. 104. Providence, RI: American Mathematical Society 1989.

Makkai, M., Reyes, G. E. [1977]: First order categorical logic. Vol. 611. Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Springer.

Manes, E. [1969]. A triple-theoretic construction of compact algebras. Seminar on Triples and Categorical Homology Theory, pp. 91–119. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 80. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1969.

May, J. P. [1967]: Simplicial objects in algebraic topology. Princeton : Van Nostrand Co., Inc. 1967.

McLarty, C. [1992]: Elementary categories, elementary toposes. Oxford: Clarendon 1992.

Mitchell, B. [1965]: Theory of categories. New York-London: Academic Press 1965.

Negrepontis, J. W. [1971]: Duality in analysis from the point of view of triples. J. Algebra **19**, 228–253 (1971).

Paré, R. [1971]: On absolute colimits. J. Algebra **19**, 80–95 (1971).

Pareigis, B. [1970]: Categories and functors. New York: Academic Press 1970.

Quillen, D.G. [1967]: Homotopical algebra. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 43. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967.

Samuel, P. [1948]: On universal mappings and free topological groups. Bull. Am. Math. Soc. **54**, 591–598 (1948).

Schnider, S., Sternberg, S. [1993]: Quantum groups: from coalgebras to Drinfeld algebras, Boston: International Press, Inc. 1993.

Schubert, H. [1970a and b]: Kategorien, Vols. I and II. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970.

Shum, M. C. [1994]: Tortile tensor categories. J. Pure Appl. Algebra **43**, 57-110 (1994).

Solovay, R. M. [1966]: New proof of a theorem of Gaifman and Hales. Bull. Am. Math. Soc. **72**, 282–284 (1966).

Stasheff, J. D. [1963]: Homotopy associativity of H-spaces. I. Trans. Am. Math. Soc. **108**, 275–292 (1963).

Steenrod, N. E. [1940]: Regular cycles of compact metric spaces. Ann. Math. **41**,

833–851 (1940).

— [1967]: A convenient category of topological spaces. Michigan Math. J. **14**, 133–152 (1967).

Swan, R. G. [1968]: Algebraic K-theory. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 76. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1968.

Tierney, M. [1972]: Sheaf theory and the continuum hypothesis, pp. 13–42. Vol. 274. Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer 1972.

Ulmer, F. [1967a]: Properties of dense and relative adjoint functors. J. Algebra **8**, 77–95 (1967).

— [1967b]: Representable functors with values in arbitrary categories. J. Algebra **8**, 96–129 (1967).

Watts, C. E. [1960]: Intrinsic characterizations of some additive functors. Proc. Am. Math. Soc. **11**, 5–8 (1960).

Yoneda, N. [1954]: On the homology theory of modules. J. Fac. Sci. Tokyo, Sec. I. **7**, 193–227 (1954).

— [1960]. On ext and exact sequences. J. Fac. Sci. Tokyo, Sec. I. **8**, 507–526 (1960).

圏，函手，自然変換といった概念は，代数的構造の変ז
るために 1940 年代に導入された．本書はその考案者の-
ス・マックレーン教授による決定版とも言えるテキストの
1971 年に出版されて以来増刷を重ねてきたが，1997 年い
点での原著者の関心を反映した増補が行われた第二版が
容は「第二版への序」に書かれているように，数学と物理
注目されるようになった組み紐付きモノイダル圏と高次
いる．ここではさらに，1980 年代以降にコンピュータ科
が盛んになるにつれて圏論が大きく発展したことも付け
れらの発展により圏論はずいぶん様変わりし，1960–70
ての研究にも再び注目が集まるようになった．本書が日本
の関心を広げる一助となれば訳者としてはこれに勝る喜
史的関心としては原著者御自身の手による記録が近刊予
Mac Lane: A Mathematical Autobiography, A K Pete
きさつや本書の記述の背景についても明らかになること

本書の翻訳作業は，第 III 章まで，第 VI 章，第 XI 章
三好が，それ以外を高木が担当して最初の訳稿を作成し
論を重ねて改訂を行った．まだ検討が不十分なところも
るが，これ以上出版を遅らせるのは望ましくないと考え
にした．正誤情報などについては下記のウェブページに
いと考えている．

http://categorical.org/cwm2ed-

将来 URL が変わることも考えられるが，その場合でも
利用すれば見つかるようにするつもりである．誤訳など

ジに掲載されているメールアドレス，もしくはシュプリンガー・フェアラーク東京編集部にご連絡頂ければ幸いである．

本書を担当されたシュプリンガー・フェアラーク東京のスタッフには，長期間にわたり辛抱強く翻訳を見守って頂いたことに深く感謝したい．また，翻訳作業に着手してからこれまで，友人達や職場の方々から多くの御助言や励ましのお言葉を承ってきた．特に，京都産業大学理学部の山田修司教授と産業技術総合研究所システム検証研究センターの西澤弘毅氏には，大変貴重なアドバイスを授けて下さったことに対し，この場で改めて感謝したい．

最後に，2005 年 4 月 14 日に原著者であるマックレーン教授が御逝去された．教授に本書をお見せすることができなかったのは返す返すも残念であるが，1999 年に Coimbra で行われた International Category Theory Meeting (CT99) の折に本書のために頂いた直筆の署名を扉に掲載させて頂き，御冥福をお祈りしたい．

2005 年 5 月 新緑の眩しい京都にて

三好　博之
高木　　理

第 3 刷に当たっての謝辞

第 3 刷を作成するに当たって多くの修正のご指摘とご示唆を頂いた慶應義塾大学商学部の白旗優先生に感謝致します．

■数字先頭欧文索引

■欧文索引

● A

● B

● D

● J

● K

● L

● M

● Q

● R

【著者】

S. マックレーン（Saunders Mac Lane）

1909 年 8 月 4 日，米国タフトヴィル生まれ．1934 年，ゲッティンゲン大学で P. ベルナイスの指導を受け論理学に関する論文で博士号を取得．1947 年よりシカゴ大学教授，1982 年より同大学名誉教授．また MAA 会長（1951-52），AMS 会長（1973-74）を歴任．主要著書に本書のほか，A Survey of Modern Algebra（G. バーコフとの共著，1941），Homology（1963），Algebra（1967），Mathematics, Form and Function（1985），Sheaves in Geometry and Logic, A First Introduction to Topos Theory（I. Moerdijk との共著，1992）などがある．2005 年 4 月 14 日，米国サンフランシスコにて歿．

【訳者】

三好　博之（みよし　ひろゆき）

京都大学理学部理学科卒業．
慶應義塾大学大学院理工学研究科数理科学専攻後期博士課程単位取得退学．
1998 年，東京大学にて博士（理学）取得．
現職：京都産業大学理学部数理科学科教授．
専門：理論コンピュータ科学，圏論，計算の哲学．
訳書：プログラミング言語 Turing（共訳，啓学出版），プログラミング言語 C++ 第 2 版（共訳，トッパン）．

高木　理（たかき　おさむ）

京都産業大学大学院理学研究科数学専攻博士後期課程修了．
1998 年，京都産業大学にて博士（数学）取得．
現職：北陸先端科学技術大学院大学知識科学研究科助教．
専門：数理論理学，知識工学．

圏論の基礎

平成 24 年 3 月 30 日　発　行

訳　者　三　好　博　之
　　　　高　木　　　理

編　集　シュプリンガー・ジャパン株式会社

発行者　池　田　和　博

発行所　**丸善出版株式会社**

〒101-0051 東京都千代田区神田神保町二丁目17番
編集：電話 (03)3512-3263／FAX (03)3512-3272
営業：電話 (03)3512-3256／FAX (03)3512-3270
http://pub.maruzen.co.jp/

印刷・株式会社 平河工業社／製本・株式会社 松岳社

ISBN 978-4-621-06324-8　C3041　　Printed in Japan

本書は，2005年7月にシュプリンガー・ジャパン株式会社より出版された同名書籍を再出版したものです．